SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Galiaskarova Guzeliya Rafkatovna

BASHKIR STATE UNIVERSITY Sterlitamak branch
candidat of physical and mathematical sciences, lecturer**A RELATION OF THE DARBOUX PROBLEM FOR THE TELEGRAPH EQUATION WITH A DEPARTURE FROM THE CHARACTERISTICS**

The article deals with the problem of constructing solutions of the Darboux problem for the case of the Riemann method departing from the characteristics. A function of the Riemann-Hadamard for the specified region. Using the Riemann-Hadamard constructed a solution of the Darboux problem and obtained a relation on the characteristic equation.

Keywords: Darboux problem, the Riemann-Hadamard function, telegraph equation

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В статье рассматривается проблема построения решения задачи Дарбу методом Римана для случая отхода от характеристики. Построена функция Римана-Адамара для заданной области. Используя функцию Римана-Адамара, построено решение задачи Дарбу и получено соотношение на характеристике уравнения.

Ключевые слова: задача Дарбу, функция Римана-Адамара, телеграфное уравнение

Рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{\xi\eta} + cu = 0, \quad (1)$$

где c – произвольное действительное число, в области $\Delta = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < \eta < \alpha\xi < 1, \alpha > 1\}$

Для данного уравнения поставим задачу Дарбу:

Задача D' . Найти в области Δ функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям

$$u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Delta}) \wedge C^1(\Delta \cup \{\eta = \alpha\xi\}), u_{\xi\eta} \in C(\Delta); Lu(\xi, \eta) \equiv 0, (\xi, \eta) \in \Delta,$$

$$u(\xi, \eta)|_{\eta=\alpha\xi} = \tau(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{\alpha}; u(\xi, \eta)|_{\eta=\xi} = \psi(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \psi(0) = \varphi(0).$$

Для решения задачи D' применим метод Римана-Адамара, который основан на так называемой функции Римана-Адамара. Ранее этот метод применялся в работах [1, с.73], [4, с.67], [3, с.71]. В частности, в работе [2, с.1] была построена функция Римана-Адамара для области, ограниченной прямыми $\eta = \xi$, $\xi = 0$, $\eta = 1$. В представленной статье характеристика уравнения $\xi = 0$ заменена прямой $\eta = \alpha\xi$, что значительно усложняет процесс построения функции.

Разобьем область Δ на следующие подобласти (в скобках указаны прямые, которые ограничивают указанные области:

$$\sigma_{2k} : \left\{ \eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}, \sigma_{2k+1} : \left\{ \eta = \alpha\xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 = \left\{ \eta = \eta_0, \xi = \xi_0, \eta = \xi_0, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha} \right\} \quad \omega_{2k} : \left\{ \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}, \\ \omega_{2k+1} : \left\{ \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\}, \quad \Delta_{2k+1} : \left\{ \eta = \xi, \xi = \frac{\eta_0}{\alpha^{k+1}}, \eta = \frac{\xi_0}{\alpha^k} \right\} \\ \Delta_{2k} : \left\{ \eta = \xi, \xi = \frac{\xi_0}{\alpha^k}, \eta = \frac{\eta_0}{\alpha^k} \right\}. \end{aligned}$$

Построим в области Δ функцию Римана-Адамара, задав её в каждой из указанных областей, следующим образом

1. $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$, как функция от (ξ, η) является решением сопряженного уравнения $L^* u = 0$, которое в данном случае является самосопряженным и, значит, совпадает с уравнением $Lu = 0$.

2. $R_\xi = 0$ на $\eta = \eta_0$; $R_\eta = 0$ на $\xi = \xi_0$; $R = 0$ на $\eta = \xi$ и $\eta = \alpha\xi$.

3. $\frac{\partial[R_1]}{\partial\xi} = 0$, где $[R_1] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\xi_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi_0; \eta_0) \right)$

$\frac{\partial[R_2]}{\partial\xi} = 0$, где $[R_2] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(R(\xi; \frac{\eta_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi_0; \eta_0) - R(\xi; \frac{\eta_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi_0; \eta_0) \right)$

$\frac{\partial[R_3]}{\partial\eta} = 0$, где $[R_3] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(R(\frac{\xi_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \eta; \xi_0; \eta_0) - R(\frac{\xi_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \eta; \xi_0; \eta_0) \right)$

$\frac{\partial[R_4]}{\partial\xi} = 0$, где $[R_4] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(R(\frac{\eta_0}{\alpha^k} + \varepsilon; \xi; \xi_0; \eta_0) - R(\frac{\eta_0}{\alpha^k} - \varepsilon; \xi; \xi_0; \eta_0) \right)$

4. $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) = 1$

Функция Римана-Адамара задачи D' определяется следующим образом

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} R_{\omega_0} = J_0 \left(\sqrt{c(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)} \right), (\xi, \eta) \in \omega_0, \\ R_{\sigma_{2k}} = R_{\omega_{2k}} - J_0 \left(\sqrt{c \left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \xi_0 \right) (\alpha^{k+1} \xi - \eta_0)} \right), (\xi, \eta) \in \sigma_{2k}, \\ R_{\sigma_{2k+1}} = R_{\omega_{2k+1}} + J_0 \left(\sqrt{c(\alpha^{k+1} \xi - \xi_0) \left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \eta_0 \right)} \right), (\xi, \eta) \in \sigma_{2k+1}, \\ R_{\Delta_{2k+1}} = R_{\omega_{2k+1}} - J_0 \left(\sqrt{c(\alpha^k \eta - \xi_0) \left(\frac{\xi}{\alpha^k} - \eta_0 \right)} \right), (\xi, \eta) \in \Delta_{2k}, \\ R_{\Delta_{2k+2}} = R_{\omega_{2k+2}} + J_0 \left(\sqrt{c(\alpha^{k+1} \eta - \eta_0) \left(\frac{\xi}{\alpha^{k+1}} - \xi_0 \right)} \right), (\xi, \eta) \in \Delta_{2k+2}, \\ R_{\omega_{2k+1}} = R_{\Delta_{2k+1}} - J_0 \left(\sqrt{c(\alpha^k \xi - \eta_0) \left(\frac{\eta}{\alpha^k} - \xi_0 \right)} \right), (\xi, \eta) \in \omega_{2k+1}, \\ R_{\omega_{2k+2}} = R_{\Delta_{2k+2}} - J_0 \left(\sqrt{c(\alpha^{k+1} \xi - \xi_0) \left(\frac{\eta}{\alpha^{k+1}} - \eta_0 \right)} \right), (\xi, \eta) \in \omega_{2k+2}. \end{cases}$$

где $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Запишем тождество Грина для оператора L :

$$u \cdot LR - R \cdot Lu = \frac{1}{2} (uR_\eta - Ru_\eta)_\xi + \frac{1}{2} (uR_\xi - Ru_\xi)_\eta$$

Выполняя стандартную процедуру, состоящую в интегрировании тождества Грина по области $\Delta_1 \cup \Delta_2$ и применении формулы Гаусса-Остроградского, получим

$$0 = \int_{\partial(\Delta_1 \cup \Delta_2)} (uR_\xi - Ru_\xi) d\xi - (uR_\eta - Ru_\eta) d\eta = I_{ED} + I_{DC} + I_{CB} + I_{BA} + I_{AE},$$

где $D = (\xi_0, \eta_0)$, $C = \left(\frac{\eta_0}{\alpha}, \eta_0\right)$, $B = \left(\frac{\xi_0}{\alpha}, \xi_0\right)$, $A = (0,0)$, $E = (\xi_0, \xi_0)$.

Вычислим интегралы $I_{ED}, I_{DC}, I_{CB}, I_{BA}, I_{AE}$:

$$I_{ED} = uR_1 \Big|_E^D = uR_1(D) - uR_1(E) = u(\xi_0, \eta_0) - \tau(\xi_0)$$

$$I_{DC} = -uR_1 \Big|_D^C = -uR_1(C) + uR_1(D) = -\psi\left(\frac{\eta_0}{\alpha}\right) + u(\xi_0, \eta_0)$$

$$\begin{aligned} I_{AC} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) \right) \Bigg|_{\eta=\alpha\xi} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta_0 - \alpha^{2n+1}\xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)}} \tau(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \xi_0\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\eta_0)(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)}} \tau(\xi) d\xi. \\ I_{AE} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) + \int_0^{\frac{\xi_0}{\alpha^n}} u(R_\xi d\xi - R_\eta d\eta) \right) \Bigg|_{\eta=\xi} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta_0 - \alpha^{2n}\xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^n\xi - \eta_0)}} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta_0 - \xi_0)}{2} \int_0^{\frac{\eta_0}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}\xi - \xi_0)\left(\frac{\xi}{\alpha^n} - \eta_0\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n\xi - \alpha^{2n}\xi_0)(\alpha^{n+1}\xi - \eta_0)}} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Подставляя, полученные интегралы в формулу и, проводя дополнительные преобразования, окончательно получим.

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \tau(\xi) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) - \frac{c(\eta - \xi)}{4} \int_0^{\xi} \frac{J_1\left(\sqrt{c(t - \xi)(t - \eta)}\right)}{\sqrt{(t - \xi)(t - \eta)}} \tau(t) dt + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta - \alpha^{2n+1}\xi)}{4} \int_0^{\frac{\xi}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi)(\alpha^{n+1}t - \eta)}} \tau(t) dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta - \xi)}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \eta)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \xi\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\eta)(\alpha^{n+1}t - \xi)}} \tau(t) dt + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\eta - \alpha^{2n}\xi)}{4} \int_0^{\frac{\xi}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^n t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi)(\alpha^n t - \eta)}} \psi(t) dt + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(\alpha^{2n+1}\eta - \xi)}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c(\alpha^{n+1}t - \xi)\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{(\alpha^n t - \alpha^{2n}\xi)(\alpha^{n+1}t - \eta)}} \psi(t) dt. \quad (2)
\end{aligned}$$

Теорема. Если функция $\tau(\xi) \in C^1\left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$, $\alpha > 1$, а $\psi(\xi) \in C^2[0,1]$, то существует единственное решение задачи D' и оно определяется формулой (2).

Положим в равенстве (2) $\xi = 0$, тогда

$$\begin{aligned}
u(0, \eta) = \tau(0) + \psi\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\alpha^{2n+1}\eta}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c\frac{t}{\alpha^n}(\alpha^{n+1}t - \eta)}\right)}{\sqrt{\alpha^{n+1}t(\alpha^n t - \alpha^{2n}\eta)}} \tau(t) dt + \\
+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c\alpha^{2n+1}\eta}{4} \int_0^{\frac{\eta}{\alpha^n}} \frac{J_1\left(\sqrt{c\alpha^{n+1}t\left(\frac{t}{\alpha^n} - \eta\right)}\right)}{\sqrt{\alpha^n t(\alpha^{n+1}t - \eta)}} \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Литература

1. Сабитов К. Б., Акимов А. А. К теории аналога задачи Неймана для уравнения смешанного типа // Известия ВУЗов. Математика. 2001. № 10. С. 73 – 80.
2. Gellerstedt S. *Quelques problemes mixtes pour l'equation* $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik. 1937. 26A (3). P. 1 – 32.
3. Акимов А. А. Задача Моравец для обобщенного уравнения Трикоми // Сибирские электронные математические известия. 2006. Т. 3. С. 71 - 82. <http://semr.math.nsc.ru>.
4. Акимов А. А. Об одной теореме единственности задачи Моравец // Альманах современной науки и образования. 2010. № 12. С. 67-69.