SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Vadim Nikolaevich Lesev

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Chief of the Department of Differential Equations of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
diff@kbsu.ru

Maryana Adibovna Shardanova

Undergraduate of mathematical faculty of
Kabardino-Balkarian State University, Russia
shardanova2010@yandex.ru

THE APPLICATION OF THE METHOD OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATIONS TO THE STUDY OF THE CLASSICAL EDGE TASK FOR THE EQUATIONS OF HIGH ORDER

Abstract: The solvability of the classical edge task for the inhomogeneous equation in partial fourth- order derivatives has been proven. The method of the finite integral transformations has been used to prove the existence of the solution.

Key words: high-order equation, edge task, proof of the existence of solution method of finite integral transformations.

УДК 517.954

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Аннотация: В работе доказана разрешимость классической краевой задачи для неоднородного уравнения в частных производных четвертого порядка. Для доказательства существования решения использован метод конечных интегральных преобразований.

Ключевые слова: уравнения высокого порядка, краевая задача, доказательство существования решения, метод конечных интегральных преобразований.

Решение методов исследования краевых задач для уравнений в частных производных является важным направлением в общей теории дифференциальных уравнений. Причем, во многом применение именно того или иного метода формирует достаточные условия разрешимости краевой задачи. Характерные отличия в использовании различных методов на примере уравнений высокого порядка могут и быть выявлены на сравнении результатов работ [1-5] и [6-8].

В настоящей работе проведено исследование краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка в односвязной области, основанное на применении метода конечных интегральных преобразований.

В области $\Omega = \{z : 0 < x < L, 0 < t < T\}$ ($L, T = \text{const} > 0$) евклидовой плоскости точек $z(x, t)$ рассмотрим уравнение

$$u_{xxtt} + \alpha \cdot u_{tt} + \beta \cdot u = f(x, t), \quad (1)$$

где α, β – заданные постоянные, $f(x, t)$ – заданная функция.

Для уравнения (1) в области Ω исследована следующая задача:

Задача. Найти регулярное в Ω решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_t(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

где $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \tau(x), \nu(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2[0, t]$, $\tau, \nu \in C[0, l]$

Применяя конечное синус-преобразование Фурье по пространственной переменной x [9.стр.75]:

$$\bar{u}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) u(x, t) dx, \quad (4)$$

к уравнению (1), будем иметь

$$p \cdot \bar{u}''(t) + \beta \cdot \bar{u}(t) = q, \quad (5)$$

где

$$p \left[\alpha - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \right], q = \bar{f}(t) - \frac{2\pi n}{l^2} \cdot \left[\varphi_1''(t) - \varphi_2''(t)(-1)^n \right], n = \overline{1, \infty},$$

а $\bar{f}(t)$ – результат преобразования функции $f(x, t)$.

Полагая $\alpha \neq \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$ из (5), находим

$$\bar{u}''(t) + a \cdot \bar{u}(t) = b, \quad (6)$$

где $a = \frac{\beta}{p}, b = \frac{q}{p}$.

Условия (3) с учетом (4), принимают вид:

$$\bar{u}(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \tau(x) dx, \quad \bar{u}'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \nu(x) dx. \quad (7)$$

Таким образом, вопрос разрешимости задачи (1)-(3) редуцирован к вопросу разрешимости задачи Коши (6), (7) относительно $\bar{u}(t)$.

Для полного исследования задачи (1)-(3) необходимо рассмотреть следующие случаи: 1) задача однородна ($b \equiv 0$) 2) коэффициент β в уравнении (1) равен 0 ($a = 0$) 3) задача не однородна и $\beta \neq 0$. Легко заметить, что первые два случая трудности в исследовании не представляют. Остановимся более подробно на последнем случае.

Так как (6) представляет собой уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом (например, n каждый раз фиксирован), то соответствующее характеристическое уравнение, имеет вид:

$$k^2 + a = 0$$

а его корни, определяются равенством:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{-a} \quad (8)$$

Как уже отмечалось выше, случай $a = 0$ является простейшим, т.к. общее решение уравнения (6) находится путем двукратного интегрирования функции b :

$$\bar{u}(t) = \int dt \int b dt + \bar{c}_1 \cdot t + \bar{c}_2, \quad (9)$$

где $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ – постоянные, которые однозначно определяются из условий (7).

Пусть теперь $\frac{\beta}{\alpha \cdot l^2 - (\pi n)^2} < 0$, т.е. $a < 0$. Тогда, как известно (например [10. стр. 107]), общее решение однородного уравнения соответствующего уравнению (6), имеет вид:

$$\bar{u}(t) = c_1 \cdot e^{t\sqrt{-a}} + c_2 \cdot e^{-t\sqrt{-a}}. \quad (10)$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, из последнего равенства, с учетом (6), находим:

$$c_1'(t) = \frac{b(t)}{2 \cdot \sqrt{-a}} e^{-t\sqrt{-a}}, \quad c_2'(t) = \frac{b(t)}{2 \cdot \sqrt{-a}} e^{t\sqrt{-a}}$$

Отсюда, будем иметь

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{-t\sqrt{-a}} dt + c_3 \\ c_2(t) &= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{t\sqrt{-a}} dt + c_4 \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим

$$\bar{u}(t) = \frac{e^{t\sqrt{-a}}}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{-t\sqrt{-a}} dt + c_3 \cdot e^{t\sqrt{-a}} - \frac{e^{-t\sqrt{-a}}}{2 \cdot \sqrt{-a}} \cdot \int b(t) \cdot e^{t\sqrt{-a}} dt + c_4 \cdot e^{-t\sqrt{-a}} \quad (12)$$

Постоянные c_1, c_2 однозначно определяются из условий (7).

Аналогично, если величина l , коэффициенты α, β и значение параметра n таковы, что $\frac{\beta}{\alpha \cdot l^2 - (\pi n)^2} > 0$, т.е. $a > 0$ и корни характеристического уравнения (8)

комплексные, то значение коэффициентов $\bar{u}(t)$ определяется по формуле

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \frac{\cos(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} \cdot \int b(t) \cdot \sin(\sqrt{a}t) dt + \bar{c}_3 \cdot \cos(\sqrt{a}t) + \\ &+ \frac{\sin(\sqrt{a}t)}{\sqrt{a}} \cdot \int b(t) \cdot \cos(\sqrt{a}t) dt + \bar{c}_4 \cdot \sin(\sqrt{a}t) \end{aligned} \quad (13)$$

где $\bar{c}_3, \bar{c}_4$ —, постоянные, которые однозначно определяются из условий (7).

Применяя обратное конечное синус- преобразование:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad (14)$$

получим искомое решение задачи (1)-(3) в виде ряда (14), коэффициенты которого, в зависимости от значений параметров l, α, β и n определяются равенствами (9),(10),(12) или (13).

References:

1. Айшаев К.М., Лесев В.Н. К теории нелинейных уравнений высокого порядка// Материалы Международного конгресса студентов, аспирантов и молодых ученых: Перспектива – 2007. Нальчик: Кааб.-Балк.ун-т.2007.-С.162-163.
2. Елеев В.А. Об одной задаче с нелокальным сдвигом для уравнения смешанного типа третьего порядка// Материалы второго Международного Российско-Казахского симпозиума « Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. 2011.-С.69-71.

3. Елеев В.А., Балкизова А.Х. Об одной нелокальной задаче со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Известия КБГУ 2011. Т.1.,№4.- С.32-40.
4. Кешева А.А., Лесев В.Н. Краевая задача для смешанно-составного уравнения четвертого порядка // Сборник научных трудов SWorld.2013.-Т.11.№1.-С.89-92.
5. Лайпанова А.М.,Елеев В.А. Об одной краевой задаче для смешанного уравнения третьего порядка со спектральным параметром // Вестник Северо-Осетинского ун-та. Естественные науки.-2013. Т.2.№1.-С.14-22.
6. Думаева Л.В., Лесев В.Н. Локальная краевая задача для неоднородного уравнения гиперболического типа четвертого порядка // Тезисы докладов Всероссийской научной конференции студентов, аспирантов, и молодых ученых.- Нальчик: Кааб.-Балк. ун-т. 2006. Т.2.-С.239-242.
7. Елеев В.А., Лайпанова А.М., Лесев В.Н. О разрешимости краевой задачи для смешанного уравнения методом конечных интегральных преобразований в прямоугольной области // Вестник Кабардино-Балкарского государственного университета. Серия математические науки. Выпуск 5.2008.-С.32-35.
8. Лесев В.Н. Исследование разрешимости краевых задач для уравнения четвертого порядка методом конечных интегральных преобразований // Материалы международной конференции: Современные проблемы математики. Махачкала: 2006.-С.44-46.
9. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров: Пер. с англ.-М.: Мир.1985 .-384 с.
10. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.:Наука.1969 .- 424 с.