

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

COMPUTER INTERPRETATION OF BIFURCATIONS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

***Abstract:** The study of parametric bifurcations of vector fields is an important problem in the theory of dynamical systems. The present work is devoted to the computer interpretation of qualitative behavior of solutions of a system of singularly perturbed nonlinear autonomous differential equations obtained from the Van der Pol oscillator. The system under consideration has a unique singular point which is of the hyperbolic type. Moreover, that point can be either nodes or foci only. The aim of the present work is to confirm these well-known results on computer.*

***Key words:** singularly perturbed system, singular point, bifurcation.*

***Language:** Russian*

***Citation:** Seidaliyeva ST (2017) COMPUTER INTERPRETATION OF BIFURCATIONS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS. ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (49): 57-63.*

***Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-49-11> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.05.49.11>*

УДК 517.938

КОМПЬЮТЕРНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ БИФУРКАЦИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

***Аннотация:** Изучение бифуркаций векторных полей является одной из важных задач теории динамических систем. Работа посвящена вопросам компьютерной интерпретации качественного поведения решений системы сингулярно возмущенных нелинейных автономных дифференциальных уравнений, полученных из осциллятора Ван дер Поля. Такая система имеет единственную особую точку, которая является гиперболической. Более того, эта точка может быть только либо узлом, либо фокусом. Цель работы - подтвердить такие известные результаты на компьютере.*

***Ключевые слова:** сингулярно возмущенная система, особая точка, бифуркация.*

Введение

Пусть задана система

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = f(\bar{x}, \bar{a}), \quad (1)$$

зависящая от $\bar{a} := (a_1, \dots, a_n) \in R^n$, где $\bar{x} := (x_1, \dots, x_n) \in R^n$. Тогда точка $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(\bar{a})$ с условием $f(\bar{x}^0, \bar{a}) = 0$ называется особой точкой (1) [2,3]. Ясно, что точки $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(\bar{a})$ зависят от \bar{a} i. Согласно определениям $\bar{a} = \bar{a}^0$ называется бифуркационным значением (1), если тип точки $\bar{x}^0 = \bar{x}^0(\bar{a})$ меняется резко. Рассмотрим уравнение Ван дер Поля [1]:

$$\frac{dx_1}{dt} = f = \alpha \left(x_1 + x_2 - \frac{x_1^3}{3} \right), \quad (2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g = -\frac{x_1}{\alpha},$$

где α – числовой параметр. Матрица

$$J = J(x_1^0, x_2^0) = \begin{pmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{pmatrix} \Big|_{(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)}$$

называется матрицей Якоби системы (2) в точке (x_1^0, x_2^0) . Собственные значения матрицы $J = J(x_1^0, x_2^0)$ можно вычислить по формуле:

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$\lambda_{1,2} = \frac{\rho \pm \sqrt{\sigma}}{2}$, где $\sigma := \rho^2 - 4\delta$, $\delta := \det(J)$ - определитель J , $\rho := \text{trace}(J)$ - след J . Пусть без ограничения общности $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

Согласно известным результатам качественной теории ОДУ особая точка плоской нелинейной динамической системы может иметь следующие типы:

Невырожденный тип ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$).

Следовательно, $J \neq 0$ и $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Такая точка может быть седлом, узлом, фокусом или центром;

Полу-гиперболический тип ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$). Следовательно, $J \neq 0$, $\delta = 0$, $\rho = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\sigma > 0$. Такая точка может быть седлом, узлом или седло-узлом;

Нильпотентный тип ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $J \neq 0$). Следовательно, $\delta = 0$, $\rho = 0$, $\sigma = 0$. Этот случай содержит седла, узлы, седло-узлы, фокусы, центры, точки возврата и т.д., всего может существовать 13 различных (топологически неэквивалентных) типов фазовых портретов в достаточно малой окрестности особой точки;

Линейно нулевой тип ($\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $J = 0$). Ясно, что $\delta = 0$, $\rho = 0$, $\sigma = 0$. Как доказано в [9], в достаточно малой окрестности такой точки возможны 65 различных (топологически неэквивалентных) типов фазовых портретов.

Основные результаты. В систему Maple 17 вводим правые части (2):

$$\begin{aligned} > f := \alpha \cdot \left(x_1 + x_2 - \frac{x_1^3}{3} \right); g := -\frac{x_1}{\alpha}; \\ f := \alpha \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{3} x_1^3 \right) \\ g := -\frac{x_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Более того, (2) имеет единственную особую точку $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} > \text{solve}(\{f, g\}, \{x_1, x_2\}); \\ \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Теперь найдем матрицу Якоби (2):

$$\begin{aligned} > j_{11} := \text{diff}(f, x_1); j_{12} := \text{diff}(f, x_2); j_{21} := \text{diff}(g, x_1); j_{22} := \text{diff}(g, x_2); \\ j_{11} := \alpha(-x_1^2 + 1) \\ j_{12} := \alpha \\ j_{21} := -\frac{1}{\alpha} \\ j_{22} := 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > J := \text{Matrix}([\{j_{11}, j_{12}\}, \{j_{21}, j_{22}\}]) \\ J := \begin{bmatrix} \alpha(-x_1^2 + 1) & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix} \\ \text{то есть } J := J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \alpha(1 - x_1^2) & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Значит в точке $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ матрица Якоби имеет собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

Их можно найти так:

$$\begin{aligned} > \text{eig} := \text{Eigenvalues}(\text{subs}(x_1 = 0, J)) \\ \text{eig} := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4} \\ \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

В случае $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ имеем $\delta = 1$, $\rho = \alpha$, $\sigma = \alpha^2 - 4$, поскольку

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$$\begin{aligned} > \delta := \text{Determinant}(\text{subs}(x_1 = 0, J)); \rho := \text{Trace}(\text{subs}(x_1 = 0, J)); \sigma := \rho^2 - 4 \cdot \delta \\ \delta := 1 \\ \rho := \alpha \\ \sigma := \alpha^2 - 4 \end{aligned}$$

Так как $\delta = 1 > 0$, то $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ не является седлом [3]. Более того, $\delta = 1 > 0$ показывает, что тип этой точки гиперболический. Теперь более подробно.

Случай $\alpha = 0$. Тогда (2) неопределена. Центр должен был получаться при $\rho = 0$. Однако $\rho = \alpha$ показывает, что (2) не имеет центра.

Случай $\alpha \neq 0$, $|\alpha| < 2$. $\sigma = \alpha^2 - 4 < 0$ дает комплексные корни. Значит согласно [3] $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ есть фокус. Условие $\rho = \alpha$

влечет, что фокус устойчивый, если $\alpha < 0$, и неустойчивый, если $\alpha > 0$. Все это мы видим на рисунках 1,2. Готовим графическое окно:

$$\begin{aligned} > \\ x_min := -1; x_max := 1; y_min := -1; y_max := 1; \\ x_min := -1 \\ x_max := 1 \\ y_min := -1 \\ y_max := 1 \end{aligned}$$

Обозначим $(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ через E_1 :

$$\begin{aligned} > \text{sing_point} := \text{plot}(\text{Vector}([0]), \text{Vector}([0]), \text{style}=\text{point}, \text{symbol}=\text{diamond}, \text{symbolsize}=20, \\ \text{legend}=[E_1], \text{color}=\text{blue}); \end{aligned}$$

$$\text{sing_point} := \text{PLOT}(\dots)$$

При $\alpha = \alpha_0 = -1$ система (2) принимает вид:

$$> \alpha_0 := -1$$

$$\alpha_0 := -1$$

$$\begin{aligned} > \text{deq} := \frac{d}{dt} x_1(t) = \text{subs}(x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \text{subs}(\alpha = \alpha_0, f)), \frac{d}{dt} x_2(t) = \text{subs}(x_1 = x_1(t), x_2 \\ = x_2(t), \text{subs}(\alpha = \alpha_0, g)); \end{aligned}$$

$$\text{deq} := \frac{d}{dt} x_1(t) = -x_1(t) - x_2(t) + \frac{1}{3} x_1(t)^3, \frac{d}{dt} x_2(t) = x_1(t)$$

Готовим фазовый портрет:

$$\begin{aligned} > \text{d_plot} := \text{DEplot}([\text{deq}], [x_1(t), x_2(t)], t = -20..20, x_1 = x_min..x_max, x_2 = y_min..y_max, \text{axes} \\ = \text{framed}, \text{linecolor}=\text{blue}, \text{numpoints}=1500, \text{color}=\text{magenta}, \text{scaling}=\text{constrained}); \end{aligned}$$

$$\text{d_plot} := \text{PLOT}(\dots)$$

Тогда следующая команда выводит на экран рисунок 1

$$\text{display}(\text{d_plot}, \text{sing_point}, \text{view} = [x_min..x_max, y_min..y_max]) :$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

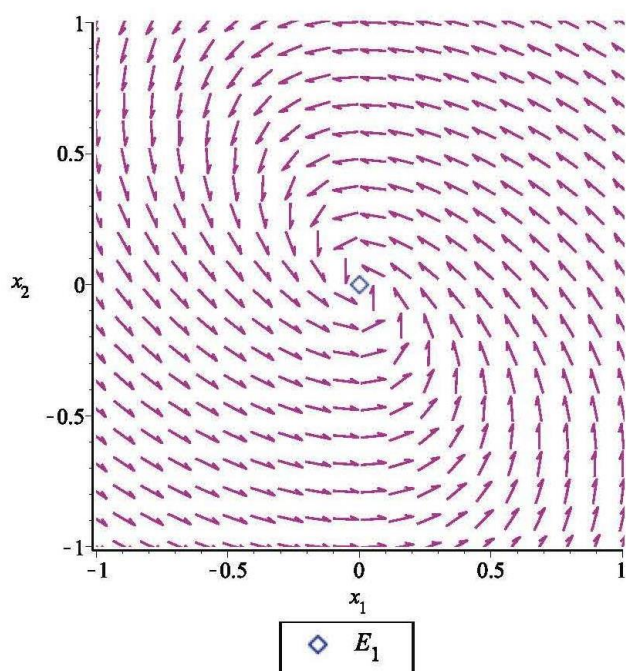


Рисунок 1 - Фазовый портрет (2) при $-2 < \alpha < 0$.

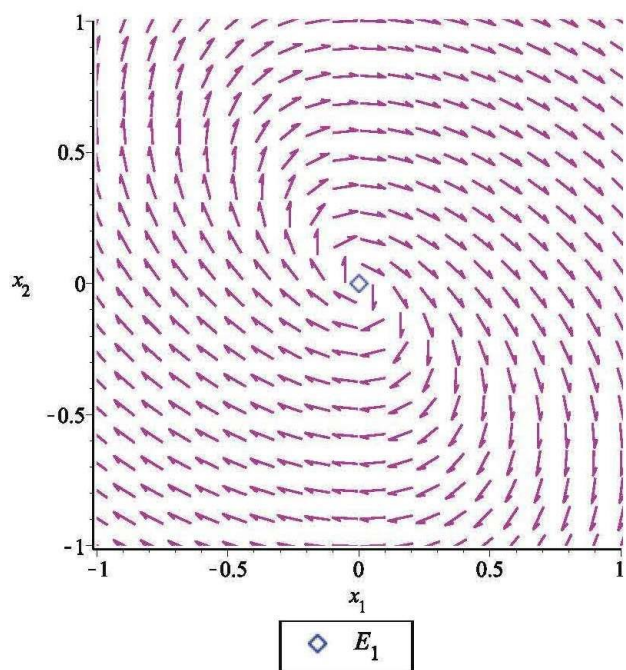


Рисунок 2 - Фазовый портрет (2) при $0 < \alpha < 2$.

Случай $|\alpha| \geq 2$. Понятно, что $\alpha < 0$ узел неустойчив. Сказанное видно на рис. 3,4.
 $\sigma = \alpha^2 - 4 \geq 0$, и $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$ - узел. Так как $\rho = \alpha$, то при $\alpha < 0$ узел устойчив, а при

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

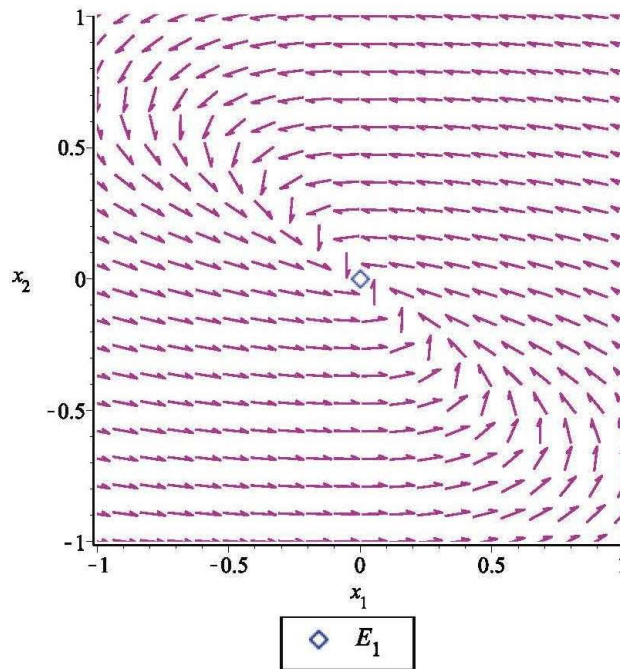


Рисунок 3 - Фазовый портрет (2) при $\alpha \leq -2$.

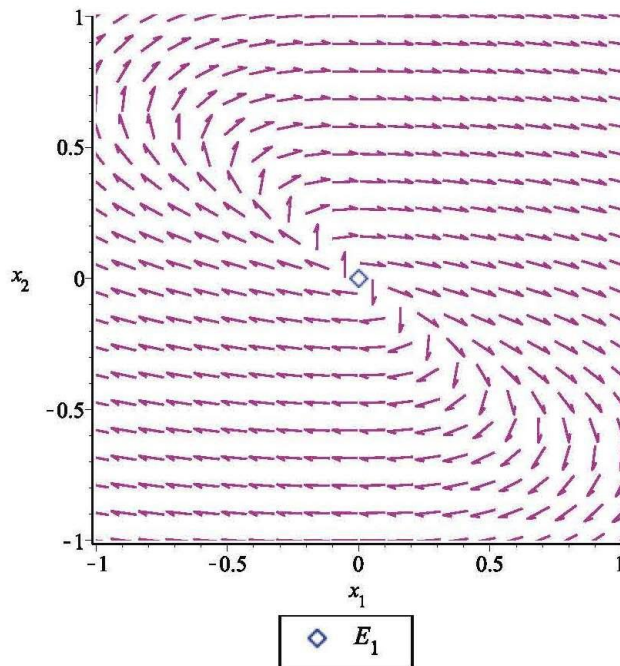


Рисунок 4 - Фазовый портрет (2) при $\alpha \geq 2$.

Так как $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$ гиперболична, то в точке $(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$ имеет место теорема Хартмана-Гробмана, то есть найдется гомеоморфизм, переводящий интегральные линии линеаризованной системы

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha(x_1 + x_2), \quad (4)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{x_1}{\alpha}$$

в интегральные линии исходной системы. Это осуществляется командами (см. рис.5):

$$> \alpha_0 := -1$$

$$\alpha_0 := -1$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHHC (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$$> leq := \frac{d}{dt}x_1(t) = subs(\alpha = \alpha_0, \alpha \cdot x_1(t) + \alpha \cdot x_2(t)), \frac{d}{dt}x_2(t) = subs\left(\alpha = \alpha_0, -\frac{1}{\alpha} \cdot x_1(t)\right);$$

$$leq := \frac{d}{dt}x_1(t) = -x_1(t) - x_2(t), \frac{d}{dt}x_2(t) = x_1(t)$$

> d_plot := DEplot([leq], [x_1(t), x_2(t)], t=-20..20, x_1=x_min..x_max, x_2=y_min..y_max, axes = framed, linecolor=blue, numpoints=1500, color=magenta, scaling=constrained);

d_plot := PLOT(...)

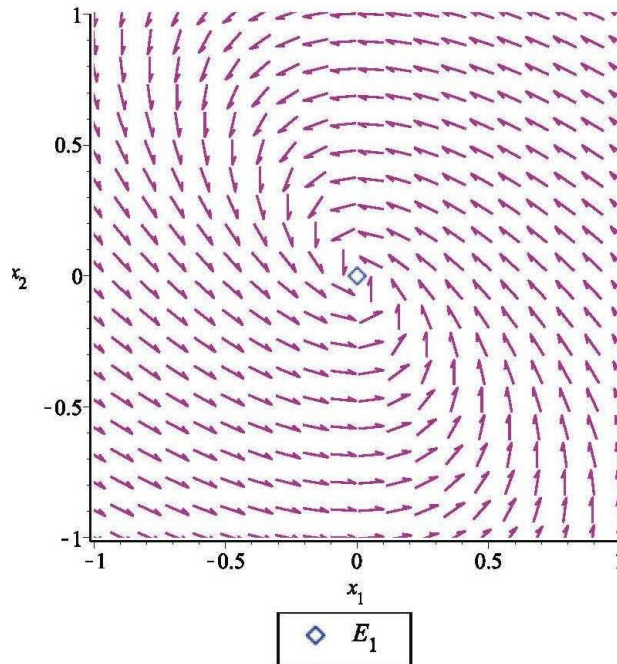


Рисунок 5 - Фазовый портрет (4) при $-2 < \alpha < 0$.

Заключение

Итак, мы выяснили, что $\alpha = 0$ и $\alpha = \pm 2$ бифуркационные значения для (2). Наконец, заключаем, что в малой окрестности точки

$(x_1^0, x_2^0) = (0, 0)$ фазовые портреты систем (2) и (4) топологически эквивалентны. Это можно заметить, сравнивая при $-2 < \alpha < 0$ рисунки 1 и 5.

References:

1. Berglund N (2001) Perturbation Theory of Dynamical Systems. Switzerland, Zurich, 2001. Available: <https://arxiv.org/abs/math/0111178v1>
2. Dumortier F, Llibre J, Artes J (2006) Qualitative Theory of Planar Differential Systems. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. 298p.
3. Perko L (2001) Differential Equations and Dynamical Systems. Texts in Applied Mathematics, 7. Springer, New York. 555p.
4. Jiang Q, Llibre J (2005) Qualitative classification of singular points // Qualitative Theory of Dynamical Systems. -V.6, -No.1. - p.87-167.
5. Dzhumabaev DS (1999) Ob odnoznachnoj razreshimosti linejnyh dvuhtocheknyh kraevykh zadach s parametrom // Izvestija MN i VO RK, NAN RK, ser. fiz.-mat.nauk. - №1. -p. 31-37.
6. Nurgabyl DN (2002) Asimptoticheskoe povedenie reshenij singuljarno vozmushhennoj kraevoj zadachi s parametrami // Materialy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.234	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

konferencii « Obrazovanie i nauka Kazahstana na rubezhe tysjacheletij». –Taldykorgan. -p. 37-40.

7. Kasymov KA, Nurgabyl DN (2003) Asimptoticheskoe povedenie reshenij linejnyh singuljarno vozmushhennyh obshhih nerazdelennyh kraevyh zadach, imejushhih nachal'nyj skachok // Ukrainskij matem. zhurnal. t. 55.- № 11.- p.1496-1508.
8. Kasymov KA, Nurgabyl DN (2004) Asimptoticheskie ocenki reshenija singuljarno vozmushhennoj kraevoj zadachi s nachal'nyj

skachkom dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij // Differencial'nye uravnenija. T.40.- № 4. – p. 597-607.

9. Kashhenko SA (2000) Bifurkacii v okrestnosti cikla pri malyh vozmushhenijah s bol'shim zapazdyvanijem // Zhurnal vych. matem. i matem. fiz.. № 4.
10. Kaschenko SA (2005) Bifurcational features in systems of nonlinear parabolic equations with weak diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol. 15, № 11.

