

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
PIHII (Russia) = 0.207
ESJI (KZ) = 3.860
SJIF (Morocco) = 2.031

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2017 Issue: 09 Volume: 53

Published: 30.09.2017 <http://T-Science.org>

S.U. Zhanatauov

candidate of physics and mathematical sciences,
Department «Automation and information technologies»,
Associate professor,

Noncommercial joint-stock company
"Kazakh national agrarian university", Kazakhstan
sapagtu@mail.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling

THEOREM ON THE Λ - SAMPLES

Abstract: The proof of the theorem on the existence of infinite sets of Λ -samples simulated within framework of the inverse model of the principal component analysis (IM PCA) [2-5,8] with $n=2$ is given in the article. IM PCA was developed for any integer value of n greater than 2: $n > 2$ [2-5,8]. Within the framework of the IM PCA, the inverse problem of the principal component analysis (IP PCA) having an infinite set of associated solutions- Λ -samples $Z^{(t, \ell)}_{mn}$, 1-dimensional z -variables in which is modeled and histogrammically adequate to 1-dimensional z -variables in a real multidimensional sample [8,12-16]. It is shown how to quantify the effect of the coefficient $r_{12}=r_{21}=r$ on the f -parameters f_2, \dots, f_6 [2-5,8] of the spectrum Λ_{mn} of the correlation matrix $R^{(\ell)}_{mn}$ and on the elements of the matrices $\Lambda_{22}, C^{(\ell)}_{22}$, the multidimensional Λ -samples $Y^{(t)}_{m2}, Z^{(t, \ell)}_{m2}$, $t=1, \dots, k_t < \infty$, $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$.

Key words: inverse model of the principal component analysis, Λ -sample

Language: Russian

Citation: Zhanatauov SU (2017) THEOREM ON THE Λ - SAMPLES. ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (53): 177-192.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-53-27> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2017.09.53.27>

ТЕОРЕМА О Λ -ВЫБОРКАХ

Аннотация: В статье дано доказательство теоремы о существовании бесконечных множеств Λ -выборок, моделируемых в рамках обратной модели главных компонент (ОМ ГК) [2-5,8] при $n=2$. ОМ ГК была разработана при $n > 2$. В рамках ОМ ГК решена обратная задача анализа главных компонент (ОЗ АГК), имеющая бесконечное множество ассоциированных решений- Λ -выборок $Z^{(t, \ell)}_{mn}$, 1-мерные z -переменные в которых модельно и гистограммно адекватны 1-мерным z -переменным в реальной многомерной выборке [8,12-16]. Показано как количественно измерить влияние коэффициента $r_{12}=r_{21}=r$ на f -параметры f_2, \dots, f_6 [2-5,8] спектра Λ_{mn} корреляционной матрицы $R^{(\ell)}_{mn}$ и на элементы матриц $\Lambda_{22}, C^{(\ell)}_{22}$, многомерных Λ -выборок $Y^{(t)}_{m2}, Z^{(t, \ell)}_{m2}$, $t=1, \dots, k_t < \infty$, $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$.

Ключевые слова: обратная модель главных компонент, Λ -выборка

Введение.

Объектами теоремы служат модели, задачи, конусы и их образующие, гиперэллипсоиды, множества, многомерные выборки, их переменные, векторы значений переменных, символы связи объектов (переменных, матриц), формулы. Применяются разные переходы (повороты, преобразования) от одного числового объекта к нескольким. Решаемые алгебраические задачи, визуализированы с применением геометрических объектов 2- и n -мерного евклидова пространства (гиперэллипсоид, конус, орграф), позволяющие визуализировать, анализировать разные сложные связи между объектами, функциями с параметрами разного уровня управления. Все это позволяет выявлять

новые цифровые факты, знания. Ниже в статье при $n=2$ выделены новые детали взаимосвязей между указанными выше объектами. Это позволяет найти и увидеть аналогичность ситуации при анализе многомерной и 2-мерной выборки реальных данных. Большое внимание уделяется обоснованию применяемых инструментов в тексте и в отсылках читателя к другим публикациям, где обсуждаемое изложено более полно. Результаты численно и визуально иллюстрированы, чтобы показать полный цикл «Данные-Преобразования-Визуализация-Анализ-Интерпретация-Выводы» при применении теоремы о Λ -выборках. Такое исследование может быть неверно понято (истолковано), не всегда присутствуют прямые фразы в моих



статьях, а их наличие в контексте письменного предложения не позволяет другому автору, прочитавшему его, делать ссылку. В работе будет показана “алгебра” (модели, задачи) перехода от одного числа - от значения коэффициента корреляции r , к многомерной геометрии: гиперэллипсоиду, многомерному конусу и к его образующим. Многомерные векторы чисел из n -мерного числового пространства преобразуются в ℓ -мерные гиперэллипсоиды, в $\ell < n$ образующие (прямые отрезки) многомерного конуса. Геометризация соотношений из рассматриваемых в теореме о Λ -выборках моделей позволили применить для извлечения цифровых знаний графические объекты теории графов, схемотехники. Они помогли конструированию письменных предложений «прочтения» рассматриваемых моделей, задач, объектов теоремы.

Модели и задачи.

В теореме о Λ -выборках применяются прямая модель главных компонент (ПМ ГК (схематичное изображение $Z_{mn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn})$), обратная модель главных компонент (ОМ ГК [2], схематичное изображение $\Lambda_{nn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, Y_{mn}, Z_{mn})$). Известные в ПМ ГК 2 матрицы n -мерных выборок известная и вычисляемая и 3 матрицы корреляций, дисперсий будут охарактеризованы в процессе изложения. В основе ПМ ГК лежит прямая задача анализа главных компонент (ПЗ АКГ [2-4]), решенная Г. Хо-теллингом [1]. В ПЗ АКГ решается прямая спектральная задача (ПСЗ) диагонализации симметрической матрицы [1,2]: $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$. Под ПЗ АКГ (ее схематическое изображение: $Z_{mn} \Rightarrow Y_{mn}$) понимается задача преобразования (вычисления) для матрицы Z_{mn} стандартизованных коррелированных z -переменных с одинаковыми дисперсиями в новые некоррелированные y -переменные из матрицы Y_{mn} (m значений n y -переменных) с разными дисперсиями. И в ПЗ АКГ при $n > 2$ обязательно решается ПСЗ, а при $n = 2$ ПСЗ решается по другому, а именно так, как изложено ниже.

Прикладная ценность теоремы о Λ -выборках выражается в применении ПМ ГК, ОМ ГК для проведения анализа, интерпретации и формулирования выводов, используя единственную многомерную стандартизованную выборку Z_{mn} [9-10]). При решении ПЗ АКГ матрицы $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$ вычисляются для имеющейся реальной стандартизованной выборки-матрицы Z_{mn} . Поэтому всегда считаем, что для известной выборки Z_{mn} всегда существуют и вычислены (или не вычислены, если они не используются нами, так как мы намерены вместо них иметь модельные) матрицы $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$. Будем предполагать, что

теоретически всегда реализована последовательность вычислений: $Z_{mn} \rightarrow R_{nn} \rightarrow C_{nn}, \Lambda_{nn} \rightarrow Y_{mn}$. В одних ситуациях мы используем это предположение, в других - нет. В теореме-критерии равенства решений прямой и обратной задач анализа главных компонент [1] предполагается теоретическое существование реализации приведенной последовательности вычислений. Теорема существования и единственности решения Y_{mn} ПЗ АКГ доказана в [1]. В современных исследованиях часто делают ссылку на теорему 10.2.1 существования и единственности решения Y_{mn} ПЗ АКГ, доказанную в монографии Т.Андерсона “Введение в многомерный статистический анализ”.

Данные о значениях свойств объектов следует преобразовать до начала анализа в многомерную стандартизованную выборку с помощью инструмента «стандартизация», это позволяет сопоставлять друг с другом значения безразмерных [17, стр.26] признаков объектов. Если мы имеем реальную многомерную стандартизованную выборку Z_{mn} то, считаем не требующими доказательств наличие и доступность для нас всех матриц $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}$. Вопросом для нас является выбор из них входного объекта, т. е. матрицы из их перечня. В ПЗ АКГ входной объект - матрица Z_{mn} . В обратной модели главных компонент (ОМ ГК) решается обратная задача анализа главных компонент (ОЗ АКГ, [2-6]), где входным объектом является диагональная матрица дисперсий главных компонент $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Спектр Λ_{nn} корреляционной матрицы R_{nn} может быть модельным [2], восстановленным [13] или реальным [8]. ПЗ АКГ считается всегда решенной в ОМ ГК, но, как доказано в [9-10], единственное решение Y_{mn} ПЗ АКГ содержится среди бесконечного множества решений ОЗ АКГ. Схематичное изображение ОМ ГК [2,3,8]: $\Lambda_{nn} \Rightarrow (R^{(\ell)}_{nn}, C^{(\ell)}_{nn}, Y^{(\ell)}_{mn}, Z^{(\ell)}_{mn})$, $\ell = 1, \dots, k_\ell < \infty$, $\ell = 1, \dots, k_\ell < \infty$. Здесь при $n > 2$ обязательно решается обратная спектральная задача (ОСЗ [1]): $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C^{(\ell)}_{nn}, R^{(\ell)}_{nn})$, $\ell = 1, \dots, k_\ell$, реализующая алгоритм из работы [11]. Методы решения ОСЗ при $n > 2$ и при $n = 2$ отличаются. При решении ОЗ АКГ для $n = 2$ применяется один из набора инструментов-моделей, применяемых при $n > 2$. Другие обратные задачи рассматривались в [7].

Конус и его образующие.

В теореме о Λ -выборках классическая задача диагонализации получила особый статус после применений [2-5, 7-8, 12, 13, 17-20] Леммы Chalmers С.Р [11]. Она стала рассматриваться как «прямая спектральная задача» (ПСЗ) [1,2]: $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$. Обратная спектральная задача (ОСЗ [1]): $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C^{(\ell)}_{nn}, R^{(\ell)}_{nn})$, $\ell = 1, \dots, k_\ell$, реализующая алгоритм из работы [11]. В

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

формулировке ОСЗ применяется геометрический объект-конус, в ПСЗ-гиперэллипсоид. Отличие ПСЗ от ОСЗ в том, что в ОСЗ моделируются i -ые компоненты ($i=1, \dots, n$) всех n собственных векторов, т.е. моделируются строки $c_i=(c_{i1}, \dots, c_{in})$, $i=1, \dots, n$, матрицы C_{nn} (они имеют номер $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$). Компоненты вектор-строки c_i интерпретируются как координаты n точек на одной (из бесконечного числа) образующей конуса K_{nn} [2,8,11]. В проекции на плоскость, перпендикулярную основанию конуса (на плоскость, проходящую через вершину конуса перпендикулярно основанию конуса). При этом на боковой поверхности конуса получаются 2 прямые - 2 образующих конуса. По Лемме из [11] угол между ними равен $\pi/2$. За одно обращение к программе CORMAT [18] алгоритма моделируются n образующих конуса, а на каждой образующей моделируются n точек с координатами c_{i1}, \dots, c_{in} , $i=1, \dots, n$. Из этих n^2 чисел образуется модельная матрица $C^{(\ell)}_{nn}$, с номером $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$, если моделируются k_ℓ матриц $C^{(\ell)}_{nn}$. Ее столбцы - их n штук, интерпретируются как компоненты собственных векторов неизвестной корреляционной матрицы с заданным спектром $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Теперь для заданной $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ модельная матрица $C^{(\ell)}_{nn}$ определяет корреляционную матрицу $R^{(\ell)}_{nn} = C^{(\ell)}_{nn} \Lambda_{nn} C^{T(\ell)}_{nn}$. Если в ОСЗ неизвестна симметричная корреляционная матрица R_{nn} , то в ПСЗ диагонализуют известную симметричную корреляционную матрицу R_{nn} методом Холецкого и вычисляют столбцы, а не строки матрицы C_{nn} собственных векторов для R_{nn} . При этом в ОСЗ значения собственных чисел (в ПСЗ) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ интерпретируются как длины полуосей гиперэллипсоида [3,8], а компоненты собственных векторов - как косинусы (синусы) углов между i -ой z -переменной и j -ой y -переменной $c_{ij} = \cos(z_i, y_j)$.

Вычислительные отличия в ПСЗ, ОСЗ зависят от размерности матриц Λ_{nn}, C_{nn} : при значениях n , превышающих приблизительно 15, у тестовых симметричных матриц с заранее известными собственными векторами и собственными числами элементы матриц Λ_{nn}, C_{nn} в ПСЗ вычисляются с заметными погрешностями. В ОСЗ таких ограничений при $n \leq 30$ не замечено. При моделировании только спектра $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ по схеме: $(\varphi, n) \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и с заданными значениями основных (не всех) f -параметров спектра. Задание значений всех 6 f -параметров - пока нерешенная задача.

Гиперэллипсоиды.

В ПМ ГК, где решается ПЗ АГК зафиксирована неизменность значений элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, т.е. постоянство длин полуосей гиперэллипсоида. Внутри него располагаются

модельные n -мерные точки координатной системы для y -переменных, полу ченных линейным преобразованием исходных, но стандартизованных z -переменных. Так как единственным решением ПСЗ является матрица C_{nn} , то в ПЗ АГК [1] выделено только единственное решение Y_{mn} . Матрица C_{nn} вычисляется единственным образом методом Якоби. Причем вычисляются только те собственные векторы, которые соответствуют ненулевым собственным числам. В ОСЗ вычисляются все $n > 2$ собственных векторов, даже соответствующие нулевым собственным числам. Поэтому общепринято существование единственного решения Y_{mn} в ПЗ АГК для единственного входного объекта Z_{mn} в ПМ ГК.

В ОЗ АГК при номере $t=1, \dots, k_t < \infty$ рассматривается ситуация когда внутри одного гиперэллипсоида (при неизменных значениях элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$) существует k_t штук множеств (из бесконечного числа) сгущений точек, состоящих из из m n -мерных точек с координатами $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$, $t=1, \dots, k_t$. Ниже в теореме о Λ -выборках доказано существование для каждого решения $Y^{(t)}_{mn}$ в ОЗ АГК бесконечного множества ассоциированных решений $Z^{(t, \ell)}_{mn}, \ell=1, \dots, k_\ell < \infty$. Геометрически это означает (при фиксированном t) существование для каждого множества из m n -мерных точек с координатами $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$ $k_\ell < \infty$ штук множеств точек с координатами $\{(z^{(t, \ell)}_{k1}, \dots, z^{(t, \ell)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$, $\ell=1, \dots, k_\ell < \infty$. Внутри каждого из $k_\ell < \infty$ гиперэллипсоидов, у которых фиксированы значения длин их полуосей $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, существует множество из m n -мерных точек с координатами $\{(y^{(t)}_{k1}, \dots, y^{(t)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$ и множество из m n -мерных точек с координатами $\{(z^{(t, \ell)}_{k1}, \dots, z^{(t, \ell)}_{kn}), k=1, \dots, m\}$. Таких пар множеств существует k_t штук. Это геометрическая иллюстрация существования для решения из бесконечного множества решений ОЗ АГК $Y^{(t)}_{mn}$ бесконечного множества ассоциированных решений $Z^{(t, \ell)}_{mn}, t=1, \dots, k_t, \ell=1, \dots, k_\ell < \infty$. Этот результат наглядно иллюстрирует вывод из теоремы 2.3 [2,8,12,13,17]: одни и те же содержательные выводы получаются не только из анализа одной рассматриваемой реальной (C, Λ) -выборки, но из анализов других модельных $(C^{(\ell)}, \Lambda)$ -выборок, являющихся решениями ОЗ АГК, что показано, например, в исследовании из [17].

Примеров адекватности как (C, Λ) -выборки [13], так и других Λ -выборок, достаточно много [2,8,12, 13]. Из ассоциированных решений ОЗ АГК- (C, Λ) -выборок $Z^{(t, \ell)}_{mn}$ после когнитивного анализа извлекаются одинаковые для всех значений t "цифровые" знания. Пример добычи фактического знания о рисках изменения доходностей ГЦБ (6 стандартизованных

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.207
ESJI (KZ) = 3.860
SJIF (Morocco) = 2.031

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260

изотермных рядов из матрицы $Z^{(\ell)}_{1311,6}$ для значений $\ell=1, \dots, 1000$) приведен в [17].

В этих моделях вычисляют (в ПМ ГК при $t=0, \ell=0$) или моделируют (в ОМ ГК при $t=1, \dots, k_t < \infty, \ell=1, \dots, k_\ell < \infty$) 2 конечные многомерные выборки $Y^{(t)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$. В выборках значений n u -переменных и n z -переменных (в ОМ ГК моделируют еще значения n u -переменных) вычисляют или моделируют три матрицы коэффициентов парных корреляций $R^{(\ell)}_{nn}, \Lambda_{nn}, C^{(\ell)}_{nn}$, характеризующие парные корреляции в множествах z -переменных: $r_{ij} = \text{corr}(z_i, z_j)$, u -переменных: $\text{corr}(y_i, y_j) = 0$ и между парами (z, u) -переменных: $c_{ij} = \text{corr}(z_i, y_j)$. Диагональные элементы в двух матрицах $R^{(\ell)}_{nn}$ и $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ равны дисперсиям z -переменных и u -переменных, $n > 2$. При этом выполняется “закон сохранения суммы дисперсий”: сумма одинаковых дисперсий z -переменных равна сумме различных дисперсий u -переменных: $\text{tr}(R_{nn}) = 1 + \dots + 1 = \text{tr}(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$. Для моделируемых и рассматриваемых здесь Λ -выборок ОМ ГК $Y^{(t)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$ законы распределения Λ -выборок из бесконечных множеств, из которых они извлечены [2,8,13], не известны. Выбранные в качестве входных объектов статистики, стали в ОМ ГК параметрами бесконечных множеств, обозначенных ниже в теореме. Таким образом введенное в [2,8] понятие параметра множества выборок, вместо параметра генеральной совокупности, отличается от соответствующего численно неизвестного параметра неизвестной функции распределения теоретической статистической совокупности. В работах [2,13] показано почему распределения вероятностей n 1-мерных переменных в выборке Z_{mn} становятся неизвестными (теряются в процессах случайных линейных преобразований) как в ОМ ГК, так и в ПМ ГК. Реальная Λ -выборка Z_{mn} и модельные Λ -выборки $Z^{(t)}_{mn}, t=1, \dots, k_t$, имеют [2,12-14] одинаковые корреляционные матрицы $R_{nn} = (1/m)Z^T_{mn}Z_{mn}$ и $R_{nn} = (1/m)Z^{(t)T}_{mn}Z^{(t)}_{mn}$, которые, имеют одни и те же спектр Λ_{nn} и матрицу C_{nn} собственных векторов: $R_{nn}C_{nn} = C_{nn}\Lambda_{nn}, C^T_{nn}C_{nn} = C_{nn}C^T_{nn} = I_{nn}$. Выборка Y_{mn} называется единственным решением ОЗ АГК: $Z_{mn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn})$, а выборка Z_{mn} называется ассоциированным решением ОЗ АГК [2]. Пояснения насчет того почему переменные случайны в матрицах Z_{mn}, Y_{mn} , и почему они преобразовываются случайным линейным преобразованием [2, стр.63-70], почему неизвестны их законы распределения вероятностей изложены в [2,8].

Цифровые знания.

В ПЗ АГК используется факт неизменности значений элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, т.е. постоянство

длины полуосей гиперэллипсоида. В прикладных исследованиях генерируются внутри него модельные n -мерные точки координатной системы u -переменных, которые при любых ℓ -отклонениях в координатной системе z -переменных, преобразуемой ортогональным преобразованием $C^{(\ell)}_{nn}$ в другую координатную систему u -переменных.

Единственное решение Y_{mn} ПЗ АГК является одним из бесконечного множества решений ОЗ АГК [2, стр.110-112] согласно теореме 2.2 [2, стр.110-112, 10,11]. Из теоремы 2.2 следует, что одни и те же содержательные выводы (цифровые знания) формулируются из анализа рассматриваемой реальной (C, Λ) -выборки или других модельных Λ -выборок ОМ ГК, являющихся ассоциированными решениями ОЗ АГК [2]. ПЗ АГК решена в [1], ОЗ АГК решена в [2-4], ОМ ГК и ее применения описаны в [2,3,8,12-17,20].

Ассоциированные решения $Z^{(t)}_{16,4} = Y^{(t)}_{16,4} C^T_{4,4}$, т.е. (C, Λ) -выборки $Z^{(t)}_{16,4}$, соответствующие решению Y_{mn} ОЗ АГК генерируются в ОМ ГК [2,12]: $\Lambda_{4,4} \Rightarrow (C_{4,4}, R_{4,4}, Y^{(t)}_{16,4}, Z^{(t)}_{16,4}), t=1, \dots, k_t$, модельно и гистограммно адекватные реальной выборке Z_{mn} , являющейся в рамках ОМ ГК также (C, Λ) -выборкой. Наличие модельной адекватности видно из трех свойств Λ -выборок, сформулированных в теореме о Λ -выборках ниже (при $n=2$) и в [2,3,8]-в теореме 2.1, для всех $n > 2$. В трех свойствах Λ -выборок [2,3,8] изменение значения номера t (или номера ℓ или пары номеров (t, ℓ)) означает, что вариабельности подвергаются элементы матрицы $Y^{(t)}_{mn}$ (или пары матриц $R^{(\ell)}_{nn}$ и $C^{(\ell)}_{nn}$, или матрицы $Z^{(t,\ell)}_{mn}$) при постоянной матрице Λ_{nn} .

Вычисленные по известной корреляционной матрице R_{nn} ее собственные числа $\lambda_{j,j}=1, \dots, n$, зависят от величин всех коэффициентов корреляции. В ОМ ГК входным объектом является спектр $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $n > 2$, вычисленный при решении ПЗ $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$. Если нет реальных данных и нет корреляционной матрицы R_{nn} , то можно смоделировать модельный спектр Λ_{nn} , (f_1, f_2, f_4) -адекватный “реальному” спектру: $(f_1, f_2, f_4) \Rightarrow \Lambda_{nn}$, такой что его f -параметры f_1, f_2, f_4 равны заданным значениям, а остальные f -параметры произвольны, где [2,8]: $f_1(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$, $f_2(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)$, $f_3(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_n$, $f_4(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) / n < 1$, $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$, $f_6(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} / \lambda_n$. Так как $\text{tr}(R^T R) = \text{tr}(\Lambda^2)$, то соотношения между f -параметрами функционально зависят от элементов корреляционной матрицы R_{nn} [2, стр.37-46].

Свойства 1-3 теоремы о Λ -выборках применяются при получении цифровых знаний [2,12-17]. Цифровые данные вида объект-

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.207
ESJI (KZ) = 3.860
SJIF (Morocco) = 2.031

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260

свойства в рамках моделей, задач преобразовываются в новые информационные объекты, визуализируются и подвергаются осмыслению, письменно сочиняют словесные предложения, адекватно описывающие геометрические объекты, краткое описание которых дано выше. Все объекты, модели, задачи применяются при конструировании цифровых знаний. С применением ПМ ГК получена информация – матрицы $C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{nn}$. Далее построены когнитивные карты в виде $\ell=3$ орграфов, для их построения из матриц выделены $\ell=3$ первые столбцы. Из графической информации выявлены цифровые телекоммуникационные знания [16], практические правила вычислений степени рисковости изменения величины процентной ставки вида «доходность к дате погашения» у валютных высокорисковых государственных ценных бумаг, рекомендуемых дилерам банка [17]. Те же матрицы участвуют в процессе получения когнитивно точного разделения факторов влияния семьи, учителей, школы на смысловые фактор-следствия, вычисленные с применением когнитивных карт (КК) и когнитивного моделирования [14, стр.59-61]. Здесь проведена визуализация когнитивной карты (КК) и соотношения (объекты теоремы) из когнитивной модели социально-экономических факторов карьерной успешности школьников. Результат - формализация плохо формализуемой ситуации, позволившая «добыть» цифровые неформальные знания из экономических данных. При этом уточнены фразы-смыслы 2-х фактор-следствий и влияющих на них 6 дуг в узлах КК, даны обоснования противоположности знаков весов дуг орграфа: 1-ое содержит 60,43% информации, извлеченных из реальных данных, 2-ое-23,255% информации, получившие когнитивно точный смысл. Сформулирован простой эмпирический факт-будущая карьерная успешность школьника зависит (формируется) под воздействием 2-х независимых факторов: «статус родителей» и «средняя оценка ученика в аттестате».

Применяемая в [2,14-16] когнитивная интерпретация - это совокупность значений (смыслов), поэтому применяется прямая и обратная модели главных компонент (ПМ ГК, ОМ ГК [1,6,10-12]), где u -переменные именованы иногда смысловыми. Такому «осмыслению» подвергаются сами элементы-матрицы $C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{nn}$ теории-((ПМ ГК)+(ОМ ГК)[1,2]), то есть интерпретируются символы связи объектов и формулы. При анализе этой сложной ситуации используем параметры и переменные ОСЗ из ОМ ГК: $\Lambda \Rightarrow (R, C, Y, Z)$. Из формулировки ОЗ АГК из ОМ ГК следует, что обратная задача вычисления оптимальной системы весов (из матрицы C_{nn}), т.е. вычисление совокупности воздействий

($C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jn}$) на j -ый фактор системы (со своей моделью причинно-следственной зависимостью в виде функций $y_{ij} = z_{i1}C_{1j} + z_{i2}C_{2j} + \dots + z_{in}C_{nj}, i=1, \dots, m$), зависит от элементов спектра

$\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$, и от параметров спектра. Вершины, дуги орграфа №1 [16] визуализируют «модель представления знаний эксперта в виде ориентированного орграфа (когнитивной карты [(Z, Y), C]), где (Z, Y=ZC) – множество факторов (6 z - и 6 y -переменных) ситуации, C_{66} -множество измерений $n^2=6^2$ причинно-следственных отношений между факторами ситуации) и 6 методов анализа экономической ситуации в телекоммуникационной отрасли, выделяющие визуализируемые подмножества факторов» в виде одного фактора y_1 [16]. При анализе будущих дебиторской и кредиторской задолженностей муниципалитетов городов США [15], с применением ПМ ГК получена информация -матрицы $C_{66}, \Lambda_{66}, Y_{m,6}, m=30$. Далее с применением когнитивных карт из матриц C_{66}, Λ_{66} выделены $\ell=3$ первые столбцы, на их основе построены $\ell=3$ орграфов – это графическая информация, а из последней выявлены цифровые знания [15]. В таких случаях иногда применяют термин «пространственная статистика» (Spatial Statistics), которые не работают напрямую со слоями ситуаций. При когнитивной интерпретации до начала анализа преобразовывают информацию в класс пространственных объектов при помощи выше приведенных инструментов-моделей, специальных задач.

Доказательство теоремы о Λ -выборках.

В начале проведем моделирование при $n=2$ пар u -переменных, y -переменных и z -переменных, не рассматривавшихся в теореме 2.1 [2,3,8]. Это будет доказательством теоремы 2.1. Недиагональный элемент $r_{12}=r_{21}=r$ корреляционной матрицы R_{22} , как показано ниже, явно присутствует во всех формулах: элементов ее спектра Λ_{22} , элементов ее матрицы собственных векторов $C^{(t)}_{22}$, элементов выборок $Y^{(t)}_{m2}, Z^{(t,\ell)}_{m2}, t=1, \dots, k_t < \infty, \ell=1, \dots, k_\ell < \infty$. При $n>2$ интуитивно ясно, что значение наибольшего элемента λ_1 тем больше, чем больше в недиагональной части матрицы R_{nn} количество коэффициентов корреляции с доминирующими абсолютными величинами. При $n=2$ геометрическая интерпретация этого факта наглядно видна и существенно помогает при применении методов добычи знаний (data mining) [14-17].

Если дана симметричная матрица R_{22} , то по известной теории решается известная оптимизационная задача, которая сводится к решению уравнения относительно λ [17]: $\det(R_{22} -$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$\lambda_{22}=0$. В прямой спектральной задаче (ПСЗ) $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C_{22})$ диагонализации матрицы R_{22} (так называется в [2] задача вычисления элементов спектра Λ_{nn} для известной матрицы R_{nn} при $n > 2$), то ее решения λ_1, λ_2 находятся из условия равенства нулю определителя характеристического уравнения: $\det(R_{22} - \lambda I_{22}) = 0$. Данное равенство преобразуется в уравнение вида $(1-\lambda)(1-\lambda) - r \times r = 0$. Решениями являются 2 значения для λ . Раскрывая скобки и группируя члены, получим квадратное уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + (1-r^2) = 0$. Собственные числа λ_1, λ_2 корреляционной матрицы R_{22} явно выражаются через коэффициент корреляции $r_{21} = r_{12} = r$ из квадратной, симметрической матрицы R_{22} : $\lambda_1 = 1+r$, $\lambda_2 = 1-r$, при этом $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$. Если $r=1$, то $\lambda_1=2$, если $r=0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. При $r < 0$ имеем $\lambda_1 = 1-r$, $\lambda_2 = 1+r$, сохраняя условие доминирования: $\lambda_1 > \lambda_2$. Система из 2 уравнений вида $R_{22} c_j = \lambda c_j$, $j=1,2$, при $\lambda_1 = 1 \pm r$, $\lambda_2 = 1(-/+)r$, имеет 2 решения $c_j = (c_{1j}, c_{2j})^T$, $j=1,2$, такие, что $c_j^T c_j = 1$, $c_1^T c_2 = 0$, $c_2^T c_1 = 0$. Все решения системы из 2 уравнений получаются при смене знака \pm при $\sin \alpha$: $c_1 = ((+/-) \times \sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, (-/+) \times \sin \alpha)^T$. Первое решение - 2 собственных вектора $c_1 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$. -здесь вставлены нижние знаки при $\sin \alpha$. Второе решение $c_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$. Знаки при $\sin \alpha$ соответствуют правосторонней ("северо-восток") системе координат. Единичные векторы c_1, c_2 ортогональны: $c_j^T c_j = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $c_2^T c_1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, $c_1^T c_2 = \sin \alpha \times \cos \alpha - \cos \alpha \times \sin \alpha = 0$. Для 2-го решения выбираем верхний знак (-) при $\sin \alpha$ в c_1 , нижний знак (+) при $\sin \alpha$ в c_2 : $c_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$, а в $c_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$ верны верхние знаки при $\sin \alpha$. Отличие первого решения системы из 2 уравнений вида $R_{22} c_j = \lambda c_j$, $j=1,2$, от второго выражается в перестановке значений z-переменных из ОМ ГК: столбцы z_1, z_2 меняются местами (Таблица 3). При остальных комбинациях знаков не выполняются соотношения из ПМ ГК, ОМ ГК-отбрасываем их. Условие стандартизованности z-переменных нарушается при $\alpha \neq \pi/4$. Расчеты при разных значениях $\alpha \neq \pi/4$ показывают: в ОМ ГК варианта 2: $R^{(l)}_{22} \Rightarrow (\Lambda^{(l)}_{22}, C^{(l,L)}_{22}, Y^{(l,t)}_{m2}, Z^{(l,t)}_{m2})$, $l=1, \dots, k_l < \infty$, $L=1,2$, $t=1, \dots, k_t < \infty$, при любых значениях коэффициента корреляции $r^{(l)}$ (при $n=2$) в правосторонней системе координат, угол поворота оси u-переменных к оси z-переменных против часовой стрелки проводится на угол $\alpha = \pi/4$ (Таблица 2).

Расположив в столбцах матрицы C_{22} компоненты векторов c_1, c_2 имеем матрицу собственных векторов со свойствами: $C_{22}^T C_{22} = I_{22}$, $C_{22} C_{22}^T = I_{22}$. Геометрическая интерпретация ПСЗ $R^{(l)}_{22} \Rightarrow (\Lambda^{(l)}_{22}, C^{(l,L)}_{22})$, $L=1,2$, $l=1, \dots, k_l < \infty$, сопряжена с алгебраическим преобразованием z-переменных в u-переменные: она заключается в повороте перпендикулярных

осей эллипса вокруг его центра на угол $\alpha > 0$ против часовой стрелки при $r > 0$ ($\alpha < 0$ при $r < 0$). Здесь $\alpha > 0$ - угол, на который приподнята большая полуось эллипса (в системе координат u-переменных) над 1-ой полуосью (в системе координат z-переменных) с длинами полуосей $\lambda_1 > \lambda_2$. Эту интерпретацию собственных чисел и компонент собственных векторов мы использовали в [3,14-16] и ниже при описании других, а именно случайных ортогональных преобразований и при моделировании t-отклонений в u- и z-переменных [3]. Выше были приведены формулы однозначного соответствия корреляционной матрицы $R^{(l)}_{22}$ и ее 2-х собственных чисел $\Lambda^{(l)}_{22}: \lambda^{(l)}_1 = 1+r^{(l)}$, $\lambda^{(l)}_2 = 1-r^{(l)}$, $l=1, \dots, k_l < \infty$. Если задана корреляционная матрица R_{22} , то это означает, что значение коэффициента корреляции $r^{(l)}$ и значение номера l фиксированы. Решение ПСЗ $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C^{(L)}_{22})$, $L=1,2$, позволяет получить решение ПЗ АГК: $R_{22} \Rightarrow (\Lambda_{22}, C^{(L)}_{22}, Y^{(l)}_{m2}, Z^{(l,L)}_{m2})$. Зная это мы можем решить и ОСЗ и ОЗ АГК. Если задан один спектр Λ_{22} , то решению ПСЗ соответствует решение ОСЗ $\Lambda_{22} \Rightarrow (R_{22}, C^{(L)}_{22})$, $L=1,2$. После получения решений ОСЗ, аналогично случаю $n > 2$, решаем ОЗ АГК: $\Lambda_{22} \Rightarrow (R_{22}, C^{(L)}_{22}, Y^{(l)}_{m2}, Z^{(l,L)}_{m2})$, $t=1, \dots, k_t < \infty$. ОМ ГК при $n=2$ имеет вид: $\Lambda^{(l)}_{22} \Rightarrow (R^{(l)}_{22}, C^{(l,L)}_{22}, Y^{(l,t)}_{m2}, Z^{(l,L,t)}_{m2})$.

Эллипсоиды при $n=2$ с длинами полуосей λ_1, λ_2 важны тем, что внутри него находится «сгущение» 2-мерных точек с координатами (y_{k1}, y_{k2}) , $k=1, \dots, m$. При любых t-отклонениях в z-переменных [11].

В общем случае при $n > 2$, при положительных 1-ых компонентах всех n собственных векторов: $c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0$, главная (самая длинная) ось гиперэллипсоида [3,8] расположена вдоль линии, образующей угол α с направлением 1-ой оси координатной системы z-переменных. В ПСЗ для нулевых собственных чисел не вычисляются их собственные векторы. В ОСЗ моделируются собственные векторы, соответствующие нулевым собственным числам, ибо в алгоритме из работы [11] моделируются строки $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in})$, $i=1, \dots, n$, матрицы C_{nn} (она имеет номер $l=1, \dots, k_l < \infty$), т.е. моделируются компоненты вектора-строки c_i . Они интерпретируются как образующие конуса K_{nn} [2,811], расположенные в сечении под прямым углом.

Теорема о Λ -выборках.

Для получения 2-мерной случайной стандартизированной выборки $U_{m2} \in N(0, I_{22})$, $= \text{diag}(1,1)$, $m > n = 2$, можно воспользоваться процедурой декорелирующего преобразования [2,18-20]: $V^{\circ}_{mn} \Rightarrow U_{mn}$, апробированного в [2,4-6,8] при многих значениях $m > n > 2$. Ранг матрицы U_{m2}

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

rk(U_{m2})=2 такой, что: $(1/m)U_{m2}^T U_{m2} = I_{22}$. Декоррелирующее преобразование реализуется на первом этапе построения ОМ ГК [2-5,8] при $n > 2$. При $n=2$ оно не применимо. Мы используем его реализации при $n > 2$ в ОМ ГК здесь для случая $n=2$. Данное декоррелирующее преобразование в работах [2-5,8] схематично обозначено так: $V_{mn}^{\circ} \Rightarrow U_{mn}$ причем оно может быть реализовано для любой выборки значений случайной величины ξ в виде матрицы данных $V_{mn}^{(t)}$ ранга $n > 2$ с номером t : $t=1, \dots, k_t < \infty$. Элементы v_{ij}° выборки $V_{mn}^{\circ} = \{v_{ij}^{\circ}\}$ являются реализациями 1-мерной случайной величины ξ . Закон распределения ее - равномерный ($\xi \sim P_{[0,1]}$) или гауссов ($\xi \sim \text{Gau}(0, \Sigma)$, $\Sigma = I_{nn}$). После вычисления средних арифметических $v_1^{me}, \dots, v_n^{me}$ для каждой из $n > 2$ столбцов матрицы $V_{mn}^{\circ} = \{v_{ij}^{\circ}\}$ вычисляется матрица $V_{mn} = \{v_{ij}^{\circ} - v_j^{me}\}$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$. Многомерная выборка V_{mn} преобразуется в случайную стандартизованную выборку U_{mn} из множества $N_s(0, I_{nn})$ [2,8] n -мерных выборок, имеющих выборочные средние, выборочные корреляционные матрицы, в точности равные $0_{1n}, I_{nn}$. При этом декоррелирующем преобразовании применяется ПЗ АГК [1,2]. Для получения нашей 2-мерной выборки $U_{mn} \in N_s(0, I_{nn})$, $m > n=2$ нельзя применить декоррелирующее преобразование к выборке V_{m2} , ибо при $n=2$ программа, например, метода Якоби не работает. Поэтому мы вынуждены реализовать при $n > 2$ декоррелирующее преобразование $V_{mn}^{\circ} \Rightarrow U_{mn}$. Из модельной выборки U_{mn} такой, что $(1/m)U_{mn}^T U_{mn} = I_{nn}$, необходимо выбрать любые 2 рядом расположенные столбцы $u_j = (u_{1j}, \dots, u_{mj})^T$, $u_i = (u_{1i}, \dots, u_{mi})^T$, $i=j+1, 1 \leq i \leq n-1$. Указанные столбцы объединим в нашу матрицу U_{m2} , являющуюся 2-мерной выборкой значений объема m некоторой случайной величины, закон распределения которой неизвестен. Мы использовали факт, применяемый при $n > 2$ и применили его для случая $n=2$. Это-проявление метода доказательства истинности утверждения, где сперва оно верно при большем значении натурального числа n , потом-для меньшего: аналога неполной обратной индукции. Выборка U_{m2} принадлежит бесконечному множеству $N_s(0, I_{22})$ 2-мерных выборок с вектором средних $0_{1n} = (0, 0)$, с единичной выборочной корреляционной матрицей $I_{22}: U_{m2} \in N_s(0, I_{22}), I_{22} = \text{diag}(1, 1)$. Таким образом введенное понятие параметра множества выборок, а не параметра генеральной совокупности отличается от соответствующего практически неизвестного параметра теоретической статистической совокупности, с неизвестной функцией распределения. В работах [2,8,12] разъяснено почему распределение вероятностей n 1-мерных переменных в выборке

Z_{mn} становится неизвестным (теряется в процессе случайных линейных преобразований) как в ОМ ГК, так и в ПМ ГК. Далее преобразуем выборку U_{m2} в выборку $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$, где значения элементов диагональной матрицы $\Lambda^{(1/2)22}$ равны значениям квадратных корней от элементов матрицы $\Lambda_{22} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$: $\lambda^{(1/2)1} = \sqrt{1+r}$, $\lambda^{(1/2)2} = \sqrt{1-r}$. Полученная 2-мерная выборка Y_{m2} содержит в 1-ом столбце 1-ую главную компоненту (y -переменную из m значений): $y_1 = (u_{11} \times \sqrt{1+r}, \dots, u_{m1} \times \sqrt{1+r})^T$, во 2-ом столбце - 2-ую главную компоненту (y -переменную из m значений): $y_2 = (u_{12} \times \sqrt{1-r}, \dots, u_{m2} \times \sqrt{1-r})^T$, где u_{11}, \dots, u_{m1} и u_{12}, \dots, u_{m2} суть значения u -переменных $u_1 = (u_{11}, \dots, u_{m1})^T$, $u_2 = (u_{12}, \dots, u_{m2})^T$, полученных выше в результате моделирования при $n > 2$ матрицы U_{mn} . Выборка $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$, представленная в виде матрицы главных компонент, удовлетворяет стандартному условию некоррелированности ее y -переменных: если $y_1^2 = ((1+r) \times (u_{11}^2)), y_2^2 = ((1-r) \times (u_{12}^2))$, $i=1, \dots, m$, то выполняется равенство $(1/m)Y_{m2}^T Y_{m2} = \text{diag}((1+r), (1-r))$, эквивалентное равенству $(1/m) \times \text{diag}[(1+r) \times (u_{11}^2 + \dots + u_{m1}^2), (1-r) \times (u_{12}^2 + \dots + u_{m2}^2)] = \text{diag} [(1+r), (1-r)]$, причем 2 m -мерных вектора значений y -переменных будучи взаимно перпендикулярными, имеют разные длины, равные $\lambda_1 = 1 \pm r, \lambda_2 = 1 - r$: $(1/m) \times \text{diag}(y_1^2, y_2^2) = \text{diag}((1+r), (1-r))$. Если $r > 0$, то $\lambda_1 = 1+r$, $\lambda_2 = 1-r$, если $r < 0$, то $\lambda_1 = 1-r, \lambda_2 = 1+r$, должно выполняться обязательное условие $\lambda_1 > \lambda_2$.

Преобразуем полученную 2-мерную выборку $Y_{m2} = U_{m2} \Lambda^{(1/2)22}$ (объема $m > 2$) значений 2-х некоррелированных y -переменных в 2-мерную выборку значений 2-х коррелированных z -переменных $Z_{m2} = Y_{m2} C^T_{22}$, где i -ая строка матрицы Z_{m2} состоит из элементов

$$z_{1i} = (u_{1i} \times \sqrt{1+r}) \times (-\sin \alpha) + u_{2i} \times \sqrt{1-r} \times \cos \alpha,$$

$$z_{2i} = ((u_{1i} \times \sqrt{1-r}) \times \cos \alpha - u_{2i} \times \sqrt{1+r} \times \sin \alpha),$$

а ее столбцы удовлетворяют условиям:

$$z_1 = (z_{11}, \dots, z_{m1})^T, z_2 = (z_{12}, \dots, z_{m2})^T, (1/m)z_1^T z_1 = r, (1/m)z_2^T z_2 = 1, (1/m)z_1^T z_2 = 1, (1/m)z_2^T z_1 = 1.$$

В отличие от y -переменных z -переменные имеют одинаковые и равные единице длины своих векторов значений. Если в таблицах 2,3 придать значению угла α любое другое значение: $\alpha \neq \pi/4$, то нарушается условие стандартизованности z -переменных, длины 2 m -мерных векторов значений y -переменных также меняются, но сохраняя сумму, равную 2.

По определению f -параметра $f_2(\Lambda_{22})$ его значение равно $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (1+r)^2 + (1-r)^2 = 2(1+r^2)$. Но это значение должно зависеть от угла α , от y -переменных, от z -переменных, от u -переменных, моделируемых в ОМ ГК при $n \geq 3$. Они (зависимости) приведены выше.

Для каждого коэффициента корреляции $0 < r \leq 1, r = r_{12} = r_{21}$, моделируются бесконечное множество корреляционных матриц $R^{(l)22}$, где l -

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

недиагональный элемент 2×2 -матрицы $R^{(\ell)}_{22}$. $\text{diag}(R^{(\ell)}_{22}) = \text{diag}(1, 1)$, $\ell = 1, \dots, 20$.

Таблицы 2,3 иллюстрируют модельные значения пар u -, y - и z -переменных, с заданными значениями f -параметров спектра корреляционной матрицы R_{22} . В качестве значения недиагонального элемента r выбраны (таблица 2) положительные числа 0.20, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55, 0.60, 0.65, -0.70, 0.70, 0.75, 0.80, 0.80, 0.85, 0.85, 0.90, 0.90, 0.95, 0.98. в таблице 3 даны эти же числа, но со знаком минус и ± 0.60 вместо ± 0.70 . По вышеприведенным формулам вычислены модельные выборки $Y^{(\ell)}_{m2}$, $Z^{(1,t)}_{m2}$, $Z^{(2,t)}_{m2}$, $t=1, m=20$ (смотрите 6 правых столбцов в таблицах 2,3). В таблице 2 (таблица 3) приведены значения элементов матриц $Y^{(\ell)}_{m2}$, $Z^{(1,t)}_{m2}$, $Z^{(2,t)}_{m2}$, $t=1, m=20$, только для $r = -0.70$, $r = 0.70$ ($r = -0.60$, $r = 0.60$). В качестве столбцов выборки $U^{(\ell)}_{m2}$ в таблицах 2,3 фигурируют 2 столбца из матрицы $U^{(\ell)}_{m14}$, смоделированной при моделировании другой Λ -выборки с $n=14 > 2$ в рамках другой задачи. При $L=1$ значения элементов выборки $Z^{(1,t)}_{m2}$ выделены зеленым цветом, а значения элементов выборки $Z^{(2,t)}_{m2}$ при $L=2$ – синим цветом.

Наша схема ОМ ГК принимает вид: $R_{22} \rightarrow (\Lambda_{22}, C_{22}, Y^{(\ell)}_{m2}, Z^{(\ell)}_{m2}), t=1, \dots, k_t < \infty$. Теперь переформулируем теорему 2.1 [2-5,8].

Теорема. Пусть $m > n > 1$, элементы диагональной матрицы $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, удовлетворяют соотношениям: $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \lambda_n = 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$, $2 < k \leq n$, $n > 2$.

При $n=2$ для бесконечного множества корреляционных матриц размерности 2×2 $R^{(\ell)}_{22}$ таких, что ее элементы удовлетворяют соотношениям: $\text{diag}(R^{(\ell)}_{22}) = (r^{(\ell)}_{11}, r^{(\ell)}_{22}) = (1, 1)$, внедиагональные элементы положительны $1 > r_{21}^{(\ell)} = r^{(\ell)}_{12} > 0$ (отрицательны: $-1 \leq r^{(\ell)} \leq 0$), а ее собственные числа равны $\lambda^{(\ell)}_1 = 1 + r^{(\ell)}$, $\lambda^{(\ell)}_2 = 1 - r^{(\ell)}$ ($\lambda^{(\ell)}_1 = 1 - r^{(\ell)}$, $\lambda^{(\ell)}_2 = 1 + r^{(\ell)}$) существуют:

а) только 2 собственных вектора $c_1 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T$, $(c_1 = (\sin \alpha, \cos \alpha)^T$, $c_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)^T$), такие, что $c_i^T c_j = 1$, $c_j^T c_j = 1$, $c_i^T c_j = 0$, $j=1, 2, i=1, 2, i \neq j$;

б) бесконечные множества многомерных выборок $U^{(\ell)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{22})$, многомерных выборок $Y^{(\ell)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, \Lambda^{(\ell)}_{22})$, представленных в виде матрицы главных компонент с элементами $y_1 = (u^{(\ell)}_{11} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}}), \dots, u^{(\ell)}_{m1} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}})^T, y_2 = (u^{(\ell)}_{12} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}, \dots, u^{(\ell)}_{m2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}})^T$, где $u^{(\ell)}_{11}, \dots, u^{(\ell)}_{m1}$ и $u^{(\ell)}_{12}, \dots, u^{(\ell)}_{m2}$ суть значения u -переменных $u^{(\ell)}_1 = (u^{(\ell)}_{11}, \dots, u^{(\ell)}_{m1})^T$, $u^{(\ell)}_2 = (u^{(\ell)}_{12}, \dots, u^{(\ell)}_{m2})^T$, полученных в результате моделирования при $n > 2$ матрицы $U_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{mn})$, $n > 2$;

в) бесконечные множества 2-мерных выборок $Z^{(t,\ell)}_{m2} \in \mathcal{CN}_s(0, R^{(\ell)}_{22})$, $t=1, \dots, k_t < \infty$ $Z^{(\ell, L, t)}_{m2} = Y^{(\ell, t)}_{m2} C^{(L, t)T}_{22}$, $\ell=1, \dots, k_\ell$, $L=1, 2$, $t=1, \dots, k_t$

$< \infty$, у которых i -ые значения 2-х коррелированных z -переменных равны:

$$z^{(\ell, L, t)}_{i1} = (u^{(\ell)}_{i1} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}}) \times (-\sin \alpha) + u^{(\ell)}_{i2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}} \times \cos \alpha, L=1$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i2} = (u^{(\ell)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \cos \alpha - u^{(\ell)}_{i2} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}} \times \sin \alpha, L=1$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i1} = (u^{(\ell)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \sin \alpha + u^{(\ell)}_{i2} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}} \times \cos \alpha, L=2$$

$$z^{(\ell, L, t)}_{i2} = (u^{(\ell)}_{i1} \times \sqrt{1-r^{(\ell)}}) \times \cos \alpha - u^{(\ell)}_{i2} \times \sqrt{1+r^{(\ell)}} \times (-\sin \alpha), L=2;$$

При $m > n > 2$ для фиксированной диагональной матрицы $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ существуют бесконечные множества:

г) ортонормированных матриц $C^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{C}$, номер $\ell = 1, \dots, k_\ell < \infty$, $n > 2$;

д) корреляционных матриц $R^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{R}_\Lambda$, имеющих спектр Λ_{nn} и матрицу $C^{(\ell)}_{mn}$ собственных векторов, расположенных по ее столбцам $R^{(\ell)}_{mn} = C^{(\ell)}_{mn} \Lambda_{nn} C^{(\ell)T}_{mn}$, $n > 2$;

е) многомерных выборок $U^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, I_{mn})$, $Y^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, \Lambda)$, $Z^{(t,\ell)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R^{(\ell)})$, номер $t=1, \dots, k_t < \infty$.

Матрицы $\Lambda_{nn}, C^{(\ell)}_{mn}, R^{(\ell)}_{mn}, Y^{(\ell)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$ удовлетворяют всем соотношениям ПМ ГК Г. Хотеллинга, а Λ -выборки ОМ ГК $Y^{(\ell)}_{mn}, Z^{(t,\ell)}_{mn}$, где объем выборок m зависит от номера t выборки: $m=m_t, t=1, \dots, k_t$, обладают 3 свойствами:

1) при номере ℓ -фиксированном, номере $t=1, \dots, k_t$, $M=m_1 + \dots + m_k, k=k_t$, если $Y^{(\ell)} \in \mathcal{CN}_s(0, \Lambda)$, $Z^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R)$,

то объединенная выборка: $Y_{Mn} = [Y^{(1)T}_{m_1 n} \dots Y^{(k_t)T}_{m_{k_t} n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda)$,

принадлежит множеству $\mathcal{N}_s(0, \Lambda)$, а объединенная выборка $Z_{Mn} = [Z^{(1)T}_{m_1 n} \dots Z^{(k_t)T}_{m_{k_t} n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, R)$;

принадлежит множеству: $Z_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R)$;

2) при номере t -фиксированном, номере $\ell=1, \dots, k_\ell$, $N=k_\ell \times m$, если выборки объема m $Y_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda)$, $Z^{(\ell)}_{mn} \in \mathcal{N}_s(0, R^{(\ell)})$, то объединенные выборки объема $N=k_\ell \times m$ имеют свойства

$$Y_{Nn} = [Y^T_{m_1 n} \dots Y^T_{m_n n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda),$$

$$Z_{Nn} = [Z^{(1)T}_{m_1 n} \dots Z^{(k_\ell)T}_{m_n n}]^T \in \mathcal{N}_s(0, \bar{R}),$$

$$\text{где } \bar{R}_{nn} = \left\{ \bar{r}_{ij} \right\} \in \mathcal{R}_\Lambda, \bar{r}_{ij} = \left(\frac{1}{k_\ell} \right) \cdot \sum_{\ell=1}^{k_\ell} r_{ij}^{(\ell)},$$

$$R^{(\ell)}_{mn} = \{r^{(\ell)}_{ij}\} \in \mathcal{R}_\Lambda, i=1, \dots, n, j=1, \dots, n$$

3) при одновременно меняющихся номерах $t=\ell=1, \dots, k$, разных объемах выборок m_1, \dots, m_k , в сумме равных $M=m_1 + \dots + m_k$, если выборка $Y^{(\ell)}_{m_t n} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda_{nn})$, выборка $Z^{(\ell, t)}_{mn} \in \mathcal{CN}_s(0, R^{(\ell)})$, $m=m_t$, то объединенные выборки объема $M=m_1 + \dots + m_k$ принадлежат множествам:

$$Y_{Mn} \in \mathcal{N}_s(0, \Lambda), Z_{Mn} = [Z^{(1,1)T}_{m_1 n} \dots Z^{(k, k)T}_{m_k n}]^T$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$\in N_s \left(0, \sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} \cdot R_{nn}^{(\ell)} \right)$ где $0 < \beta_{\ell} = m_{\ell} / M < 1$,
 $\beta_1 + \dots + \beta_k = 1$.

Замечание 1. Линейная комбинация корреляционных матриц $\beta_1 R_{nn}^{(1)} + \dots + \beta_k R_{nn}^{(k)}$ является также корреляционной матрицей, ибо она симметрическая, ее диагональные элементы равны 1: $\beta_1 + \dots + \beta_k = 1$, ее внедиагональные элементы по абсолютной величине не превосходят 1: $\beta_1 r_{ij}^{(1)} + \dots + \beta_k r_{ij}^{(k)} \leq \beta_1 + \dots + \beta_k = 1$, для каждого внедиагонального элемента $r_{ij}^{(\ell)}$, $i=1, \dots, n, j=1, \dots, n, \ell=1, \dots, k$.

Выражение “линейная комбинация корреляционных матриц” было использовано впервые в 1988 г. [4]. В статьях, на научных семинарах, в диссертации, в докладе на Всемирном конгрессе (World Congress of Society Mathematical Statistic and Probabilility Theory of Bernoulli) ученым сообществом оно одобрено в 1980-88 гг [4, 5, 8].

Визуализация темпов изменения значений параметров Λ -выборки

При анализе реальных цифровых данных, особенно при добыче знаний из них чрезвычайно важно видеть на 2-мерной плоскости закономерности изменения значений ключевых величин, обобщенно характеризующих свойства изучаемых объектов. Таких величин выявлено и использовано множество. Ограничимся только моделью анализа главных компонент (АГК, [1, 2]). Рассмотрим f -параметры f_1, \dots, f_6 при $f_1 = n=2$, важных для “видения” на 2-мерной плоскости темпов изменения значений параметров Λ -выборки (Таблицы 2, 3, Рисунки 1, 2).

При $n=2$ в задачах [13-17, 20] регулирования, использования степени коррелированности z -переменных актуально быстрое наглядное видение темпов изменения значений 5 f -параметров f_2, \dots, f_6 темпов уменьшения значений элементов спектра $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ в зависимости от изменения значений только одного коэффициента корреляции r (при $n=2$, Таблица 2) или φ (при $n>2$, Таблица 1, Рисунок 3). Например, при $r=0.2$ имеем $\lambda_1=1+r=1.2$, $\lambda_2=1-r=0.8$, $f_1=2$, $f_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2=2.08$, $f_3=\lambda_1/\lambda_2=1.5$, $f_4=(\lambda_1)/2=0.6$ ($\ell=1<2$), $f_5=\lambda_1 \times \lambda_2=0.96$, $f_6=\lambda_1/\lambda_2=1.5$, а при $r=0.7$ имеем: $\lambda_1=1.7$, $\lambda_2=0.3$, $f_1=2$, $f_2=2.98$, $f_3=5.666666$, $f_4=0.85$ ($\ell=1<2$), $f_5=0.51$, $f_6=5.666666$. Более подробные и полезные сведения приведены в Таблицах 2 и 3. При $n>2$ вместо коэффициента корреляции r применяется коэффициент φ -величина средней квадратической всех n^2-n коэффициентов корреляции: $0 < \varphi < 1$. В Таблице 1 приведены значения $\varphi = r$, f_1, \dots, f_6 , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, $n=6$. Сравнить динамики изменения $\ell=3$ элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}$ у 20 спектров из Таблицы 1 позволяет Рисунок 1. Вычисления модельных значений элементов 20

спектров для 20 неизвестных корреляционных матриц, имеющих заданные значения f -параметров проведены с применением ППП «Спектр» [18-20]. Простота, ясность, легкость восприятия вычисленных данных при $n=2$ позволяют аналитику выбрать из интересующих его строк таблицы 1 полезные цифровые знания. Из Таблиц 1, 2, 3 можно увидеть аналогичность динамик (на Рисунке 3- элементов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$) зависимостей 2 или 3 из 5 f -параметров f_2, \dots, f_5 , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (при $n=2$ и при $n=6>2$) от изменения значений только одного коэффициента корреляции r и от изменения величины средней квадратической коэффициентов корреляции φ $0 < r < 1$ и $0 < \varphi < 1$.

Выбранная в качестве входного объекта в ОМ ГК статистика Λ_{22} стала параметром множества выборок $N_s(0, \Lambda_{22})$. Выборок $U_{m2}^{(t)}$ существует бесконечное число: ее номер t принимает целые значения: $t=1, \dots, k_t < \infty$. Матрицу $Y_{m2}^{(t)} = U_{m2}^{(t)} \Lambda^{(1/2)}_{22}$ главных компонент также существует бесконечное число. Матрице R_{22} (зависящей от одной величины ны $r = \Gamma_{12} = \Gamma_{21}$) соответствует 2 набора собственных векторов (они приведены выше), причем элементы $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ матрицы собственных векторов $C_{22}^{(t)}$ зависят от одного угла $\alpha = \pi/4$, охарактеризованного выше. Обозначим конечное множество матриц $\{C_{22}^{(L)}\}, L=1, 2$. Значение угла α равно: $0 < \alpha = \pi/4$, при $L=1, 2$. При других значениях угла α нарушается условие нормированности векторов z -переменных вида: $(1/m) \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 = \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = r$, $(1/m) \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1 = 1$, $(1/m) \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 = 1$. Условие нормированности (равенства нормы 1) векторов z -переменных, участвующих в формуле вычисления коэффициента корреляции Пирсона, является обязательным по определению. Читатель может воспользоваться данными из Таблиц 2, 3 и проверить расчеты, изменив значения угла α из графы Таблицы 2 или 3. На Рисунке 1 визуализированы в виде облака точек пары чисел $\{(y_{k1}, y_{k2})\}, k=1, \dots, 20$. В ней матрица N_{22} чисел точек: $n_{11}=6$, $n_{12}=5$, $n_{21}=3$, $n_{22}=6$, $n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}=20$, такова, что 1-ая ось эллипса лежит на оси абсцисс, т.е. горизонтальна. Ортогональным преобразованием матрицы $Y_{m2}^{(t)}$, $t=1$, получают значения z -переменных (они приведены в 2-х последних столбцах таблицы 2 и 3). На рисунке 2 эти пары чисел $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$, визуализированы в виде облака точек. Здесь 1-ая ось эллипса лежит выше оси абсцисс. Матрица N_{22} чисел точек $n_{11}=3$, $n_{12}=7$, $n_{21}=6$, $n_{22}=4$, $n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}=20$, соответствует на Рисунке 2 сгущению точек $(13=7+6)$ в 1-ом и в 3-м квадрантах из 4-х квадрантов декартовой системы координат. Это - иллюстрация степени вытянутости эллипса с приподнятой осью абсцисс, внутри которого распределены 20 2-мерных точек с координатами $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$,

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

при значении коэф фициента $r=0.70$. В ПМ ГК «фигура» из Рисунка 2 преобразуется в «фигуру» из Рисунка 1. Информацию из этих таблиц иллюстрируют преобразования (повороты, операции над объектами “алгебры”, возникающие во взаимодействии с “геометрией”). Она помогает [2,8,12-17] рассмотреть появление и построение графических схем в виде тех геометрических фигур, которые помогли тому восприятию в «шагах развития» восприятия, анализа и визуализации, например при $n=6$ (или $\ell=3$),

первых ℓ столбцов матриц $R_{6,6}, C_{66}, \Lambda_{66} Y_{131,6}, S_{66} = \text{diag}(s_1, \dots, s_6)$, как показано на рисунках 1,2, в таблицах 3,4 из статьи [17].

При заданных значениях средних x_j^{cp} (с разными единицами измерения) и значений дисперсий s_j^2 значения z-переменных (Таблицы 2 и 3) $z_{ij} = (x_{ij} - x_j^{cp}) / s_j$, где $x_j^{cp} = (x_{1,j} + \dots + x_{20,j}) / 20$, $s_j^2 = (x_{1,j}^2 + \dots + x_{20,j}^2) / 20$, $x_{ij} = x_{ij} - x_j^{cp}$, $i=1, \dots, 20$, $j=1, 2$, вычисляются легко.

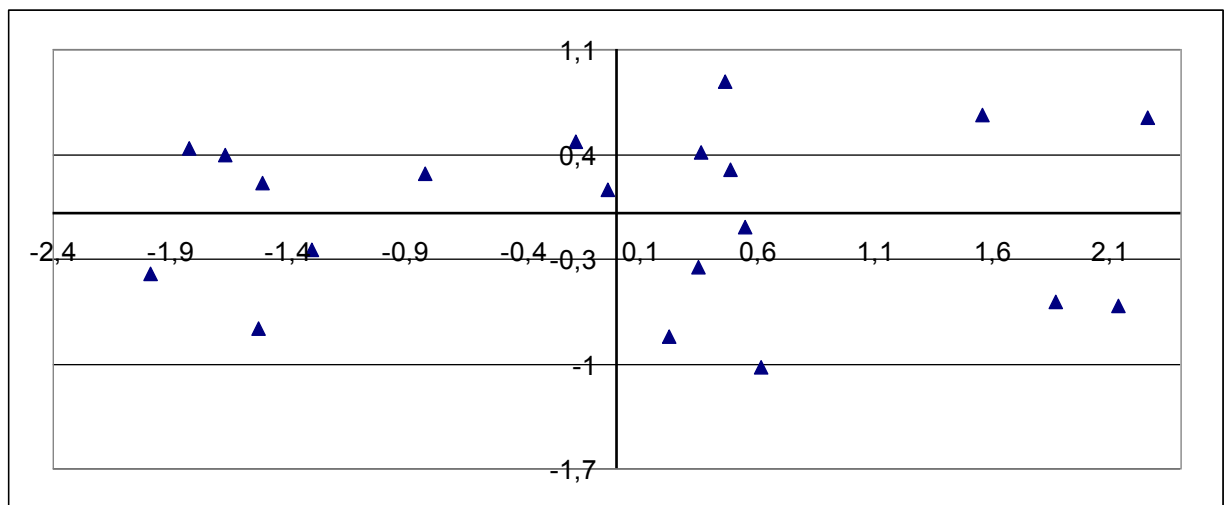


Рисунок 1 - Облако точек с координатами $(y_{i1}, y_{i2}), i=1, \dots, 20$

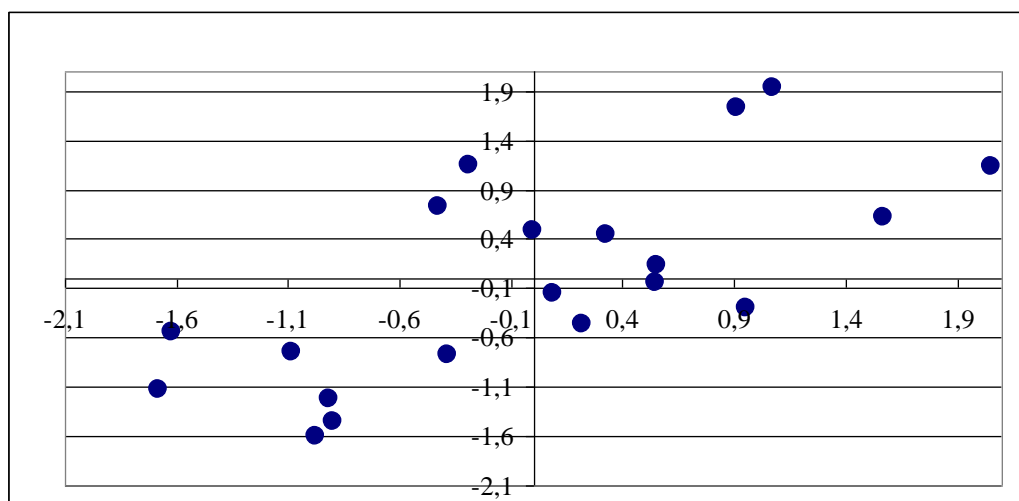


Рисунок 2 - Облако точек с координатами $(z_{i1}, z_{i2}), i=1, \dots, 20$

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

Таблица 1

Модельные значения элементов 20 спектров 20 неизвестных корреляционных матриц, имеющих заданные значения f-параметров спектра

f-parameters of the spectrum $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$							Eigen values						
ph	f ₄	f ₃	f ₂	f ₅	f ₁	f ₆	ℓ	λ ₁	λ ₂	λ ₃	λ ₄	λ ₅	λ ₆
0.2	0,79 38	3,31500	42773,00 00	0,599 500	6	796017,0 000	4	1,90200 000	1,17500 000	0,91910 000	0,76720 000	0,66320 000	0,57380 000
0.3	0,76 40	6,44800	42924,00 0	0,282 000	6	7,2920	3	2,29200 000	1,39300 000	0,89950 000	0,59910 000	0,46120 000	0,35540 000
0.3 5	0,79 58	8,74524	9,675001	0,182 274	6	2114208, 0000	3	2,54733 800	1,40892 000	0,81845 260	0,53813 780	0,39586 830	0,29128 280
0.4	0,83 03	42808,000 00	##### ####	0,097 690	6	8,5590	3	2,81300 000	0,1,348	0,82040 000	0,50600 000	0,31540 000	0,19670 000
0.4 5	0,86 49	21,63208	12,07500 0	0,046 543	6	357818,0 000	2	3,05660 700	1,38044 600	0,75255 380	0,42503 400	0,24405 930	0,14129 980
0.5	0,77 28	24,23000	13,50000 0	0,031 670	6	1606217, 000	2	3,35600 000	1,28100 000	0,62110 000	0,37610 000	0,22780 000	0,13850 000
0.5 5	0,81 41	47,28865	15,07501 0	0,009 343	6	2653397, 0000	2	3,59983 600	1,28448 700	0,59059 560	0,29829 470	0,15066 100	0,07612 474
0.6	0,86 14	0,11800	160,8000 00	0,001 400	6	13,0017	2	3,83500 000	0,1,333	0,51670 000	0,20180 000	0,08080 000	0,03249 000
0.6 5	0,88 74	185,56070	18,67500 0	0,000 450	6	14,2816	2	4,12541 100	1,19904 300	0,43442 560	0,15997 720	0,05891 169	0,02223 214
0.7	0,92 73	691,49630	20,69999 0	0,000 021	6	18,4896	2	4,38049 700	1,18360 200	0,31980 690	0,08641 125	0,02334 816	0,00633 481
0.7	0,92 11	0,474,1	20,70000 0	0,000 047	6	17,1795	2	4,39200 000	1,13400 000	0,33290 000	0,10090 000	0,03057 000	0,00926 400
0.7 5	0,94 55	1021,1070 0	22,87500 0	0,000 005	6	20,0648	2	4,66958 100	1,00332 000	0,24318 250	0,06262 590	0,01671 715	0,00457 306
0.8	0,96 77	0,4492,00	250,2000 00	0,000 000	6	260,9054	2	4,94300 000	0,86350 000	0,15830 000	0,02901 000	0,00564 900	0,00110 000
0.8	0,96 70	4637,6080 0	25,20001 0	0,000 000	6	27,0671	2	4,94326 700	0,85860 540	0,16113 520	0,03024 825	0,00567 819	0,00106 591
0.8 5	0,86 93	19181,160 00	27,67500 0	0,000 000	6	35,9893	1	5,21571 900	0,68060 610	0,08881 318	0,01275 724	0,00183 247	0,00027 192
0.8 5	0,86 93	19181,160 00	27,67500 0	0,000 000	6	35,9893	1	5,21571 900	0,68060 610	0,08881 318	0,01275 724	0,00183 247	0,00027 192
0.9	0,91 42	76270,000 00	300,3000 00	0,000 000	6	470,7100	1	5,48500 000	0,45870 000	0,04986 000	0,00559 500	0,00063 300	0,00007 192
0.9	0,91 41	92701,780 00	30,30000 0	0,000 000	6	49,4963	1	5,48479 600	0,46352 430	0,04619 431	0,00489 140	0,00053 465	5,9166E -05
0.9 5	0,95 77	0.2458158 E+07	33,07500 0	0,000 000	6	95,6638	1	5,74603 300	0,24074 410	0,01251 814	0,00066 365	3,89E- 05	2,34E- 06
0.9 8	0,98 32	0.133335E +09	34,81200 0	0,000 000	6	215,8054	1	5,89934 700	0,09851 261	0,00208 683	5,25571 E-05	1,45E- 06	4,42E- 08



Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

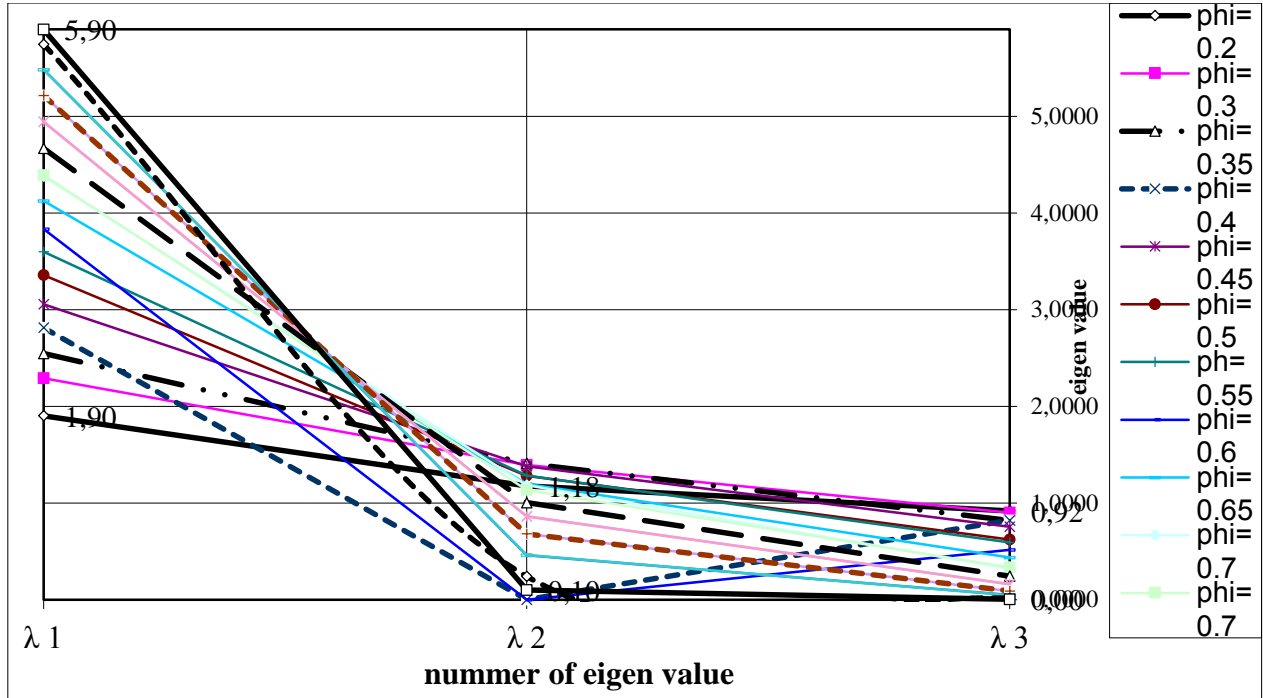


Рисунок 3

Таблица 2

Модельные значения пар u-, y- и z-переменных, с заданными значениями f-параметров спектра корреляционной матрицы R₂₂ (r<0, a, f₁,...,f₆)=> (Λ₂₂, C^(L)₂₂, Y^(t)_{m2}, Z^(L,t)_{m2}), t=1, L=1,2, m=20

r	The value of the coefficient r divisor for number π	the angle of rotation α=π/4 (radian)	f-parameters of the spectrum Λ=diag(λ ₁ , λ ₂)						Eigen values		Values of the u-variables		Values of the y-variables		Values of the z-variables: r=0.60, c ₁ =(-sinα,cosα), c ₂ =(cosα,sinα)		Values of the z-variables: r= - 0.60, c ₁ =(sinα,cosα), c ₂ =(cosα,-sinα)	
			f ₄ =(1-r)/2	f ₃ =(1-r)/(1+r)	f ₂ =(1-r)/2 + (1+r)^2	f ₅ =(1-r) × (1+r)	f ₆ =(1-r)/(1+r)	λ ₁ = 1-r	λ ₂ = 1+r	u ₁	u ₂	y ₁ =√(1+r)	y ₂ =√(1-r)	z ₁ =y ₁ c ₁ ^T	z ₂ =y ₂ c ₂ ^T	z ₁ =y ₁ c ₁ ^T	z ₂ =y ₂ c ₂ ^T	
+0,20	4	0,754	0,4000	0,6667	2,0800	0,9600	0,6667	0,8	1,2	0,265857	-0,6400776	0,33628584	0,404821	0,5240414	-0,0484614	-0,0484614	0,524041403	
+0,30	4	0,785	0,3500	0,3846	2,1800	0,9100	0,5385	0,7	1,3	1,169666	1,397913	1,4795235	0,88418	0,421015376	-1,6713468	-1,6713468	-0,42101538	
+0,35	4	0,788	0,3250	0,4181	2,2450	0,8775	0,4815	0,6	1,4	1,192892	1,215906	1,50890229	0,769065	0,52318535	1,6107247	1,6107247	0,523185347	
+0,40	4	0,788	0,3000	0,4282	2,2884	0,8442	0,42	0,8	1,2	1,0303	0,293015	0,04083	0,1853	0,159918394	0,1021622	0,1021622	-0,15991839	



Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHHI (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

	7 8 5 4	00	57 1	00	00	86			2286 7		98	19						
	0 7 8 5	0 27 50	0,3 79 31 0	2 40 50	0 79 75	0 37 93	0, 1 5 4 5 5	1,43 3465	- 1,062 154		1,81320 574	0,6 717 65	- 1,7571397 8	0,8071204	0,8071204	1,75713978 3		
+0,4 5	4	0 7 8 5	0, 0,2 22 50 3	2, 0,6 90 50	0, 0,29 60 75	0, 0,29 03	0, 1 4 5 5 5	- 1,15 5834 6	0,381 7003	1,46202 79	0,2 414 085	1,2045114 16	-0,8631083	-0,8631083	-1,20451142			
	0 7 8 5	0 80 00	4,0 00 0	2, 0,4 72 00	0, 0,4 64 00	4, 0,0 00	1, 0, 6 4	- 1,27 8678	0,716 2939	1,61741 39	0,4 530 24	1,4640207 42	-0,823348	-0,823348	-1,46402074			
+0,60	4	0 7 8 5	0, 0,2 20 00 0	2, 0,25 72 00	0, 0,25 00	0, 0,0	0, 1, 4 6	1,63 656	- 1,122 022	2,07010 285	0,7 096 29	1,9655672 6	0,9620003	0,9620003	1,96556725 7			
	0 7 8 5	0 17 50	0,2 12 12 1	2, 0,57 84 50	0, 0,21 57 75	0, 0,21 21	0, 1, 3 6 5 5	1,73 3096	1,179 544	2,19221 231	0,7 460 091	1,0226200 7	2,0776363	2,0776363	1,02262007 4			
+0,6 5	4	0 7 8 5	0, 0,1 15 76 47 1	2, 0,98 98 00	0, 0,17 51 17 65	0, 0,17 65	0, 1, 3 7	0,46 8010 8	- 1,868 183	0,59199 204	1,1 815 43	1,2540784 2	-0,4168753	-0,4168753	1,25407842 2			
	0 7 8 5	0 15 76 47 1	0, 0,1 15 76 47 1	2, 0,98 98 00	0, 0,17 51 17 65	0, 0,17 65	0, 1, 3 7	0,41 8308 4	- 0,158 5512	0,52912 292	0,1 002 77	0,4450526 6	0,3032402	0,3032402	0,44505265 9			
+0,7 0	4	0 7 8 5	0, 0,1 12 42 85 7	3, 0,43 12 50	0, 0,14 43 29	0, 0,14 29	0, 1, 2 7 5 5	0,27 3355 5	0,759 4756	0,34577 04	0,4 803 345	0,0951512 22	0,5841444	0,5841444	-0,09515122			
	0 7 8 5	0 10 11 1	0, 0,1 10 11 1	3, 0,36 28 00	0, 0,11 36 11	0, 0,11 11	0, 1, 2 8	0,35 1384 5	1,619 957	0,44447 014	1,0 245 508	0,4101789 43	1,0387546	1,0387546	-0,41017894			
+0,8 0	4	0 7 8 5	0, 0,1 10 11 1	3, 0,36 28 00	0, 0,11 36 11	0, 0,11 11	0, 1, 2 8	- 0,13 4127 6	0,886 2605	0,16965 95	0,5 605 204	0,5163151 17	0,2763804	0,2763804	-0,51631512			
	0 7 8 5	0 07 50	0, 0,0 07 81 08 1	3, 0,27 44 50	0, 0,08 27 75	0, 0,08 11	0, 1, 1 8 5 5	0,37 2013 9	0,545 4205	0,47056 45	0,3 449 542	0,0888198 8	0,5766588	0,5766588	0,08881988 5			
+0,8 5	4	0 7 8 5	0, 0,0 07 81 08 1	3, 0,27 44 50	0, 0,08 27 75	0, 0,08 11	0, 1, 1 8 5 5	- 1,39 6426	0,802 1942	1,76635 47	0,5 073 522	1,6077535 37	-0,8902492	-0,8902492	-1,60775354			
	0 7 8 5	0 05 63 2	0, 0,0 05 52 63 2	3, 0,19 62 00	0, 0,05 19 05 26	0, 0,05 05 26	0, 1, 1 9	0,99 5883 5	0,432 9503	1,25970 41	0,2 738 22	0,6971240 21	-1,0843665	-1,0843665	-0,69712402			
+0,9 0	4	0 7 8 5	0, 0,0 05 52 63 2	3, 0,19 62 00	0, 0,05 19 05 26	0, 0,05 05 26	0, 1, 1 9	- 0,62 7871 5	0,498 7839	0,79420 16	0,3 154 586	0,7846482 83	-0,3385224	-0,3385224	-0,78464828			
	0 7 8 5	0 02 50	0, 0,0 02 25 64 50 1	3, 0,09 80 75	0, 0,02 09 02 56	0, 0,02 02 56	0, 1, 0 9 5 5	0,16 7874 9	- 1,494 8581	0,21234 682	0,9 454 31	0,8186727 4	-0,518369	-0,518369	0,81867274 1			
+0,9 5	4	0 7 8 5	0, 0,0 01 10 08	3, 0,03 03 01	0, 0,01 01 09	0, 0,01 01 09	0, 1, 0 9 2 8	- 1,52 2049	- 0,721 8416	1,92525 75	0,4 565	1,0385452 6	-1,68418	-1,68418	-1,03854526			



Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

8 5 4	1	7	33				
(1/20)×sum of squares of values of u-, y-, z-variables ==>		1,0 000 000	1,5 999 999	0,4	1,000000	1,000000	1,000000
		0	9				1,000000

Таблица 3

Модельные значения пар u-, y- и z-переменных, с заданными значениями f-параметров спектра корреляционной матрицы R₂₂
 (r>0, a, f₁,...,f₆)=> (Λ₂₂, C^(L)₂₂, Y^(t)_{m2}, Z^(L,t)_{m2}), t=1, L=1,2, m=20

r	int	The value of the coefficient r divisor for number π the angle of rotation =π/4 (radian)	f-parameters of the spectrum Λ=diag(λ ₁ , λ ₂)						Eigen values		Values of the u-variable s		Values of the y-variable s		Values of the z-variables: r=+0.70, c ₁ =(-sinα,cosα), c ₂ =(cosα,sinα)		Values of the z-variables: r= +0.70, c ₁ =(sinα,cosα), c ₂ =(cosα,-sinα)	
			f ₁ =(1-r)/2	f ₂ =(1-r)/(1+r)	f ₃ =(1-r) ² +(1+r)	f ₄ =(1-r) ³ +(1+r) ²	f ₅ =(1-r) ⁴ +(1+r) ³	f ₆ =(1-r) ⁵ +(1+r) ⁴	λ ₁ =1-r	λ ₂ =1+r	u ₁	u ₂	y ₁ =√(1+r)	y ₂ =√(1-r)	z ₁ =y ₁ c ₁ ^T	z ₂ =y ₂ c ₂ ^T	z ₁ =y ₁ c ₁ ^T	z ₂ =y ₂ c ₂ ^T
0,2	4	0,54	0,40	0,66	2,08	0,96	0,66	0,8	1,2	0,26	0,66	0,34	0,3	-0,49301	-0,00279267	-0,0027927	0,49300931	
0,3	4	0,54	0,50	1,00	2,00	1,00	1,00	1	1	1,16	1,39	1,52	0,7	0,536969	-1,61978815	-1,6197881	-0,5369694	
0,3	5	0,54	0,32	0,48	2,24	0,87	0,48	0,6	1,3	1,19	1,25	1,55	0,6	-0,62887	1,57071045	1,5707105	0,62887371	
0,4	4	0,54	0,30	0,42	2,32	0,84	0,42	0,6	1,4	0,03	0,93	0,04	0,1	0,143251	0,08371735	0,0837174	-0,1432511	
0,4	5	0,54	0,27	0,31	2,40	0,79	0,31	0,5	1,5	1,34	1,06	1,89	0,5	-1,73296	0,91021895	0,910219	1,7329599	
0,5	4	0,54	0,50	1,00	2,00	1,00	1,00	0,5	1,5	1,15	1,81	1,57	0,2	1,213459	-0,91779491	-0,9177949	-1,2134587	
0,5	5	0,54	0,25	0,30	2,90	0,69	0,29	0,4	1,5	1,27	1,16	1,67	0,3	1,456302	-0,90146343	-0,9014634	-1,4563023	
0,6	4	0,54	0,30	0,42	2,72	0,64	0,25	0,4	1,6	1,63	1,13	2,13	0,6	-1,94339	1,07427652	1,0742765	1,94339102	
0,6	5	0,54	0,12	0,12	2,84	0,57	0,21	0,3	1,6	1,73	1,17	2,25	0,6	-1,141	2,05467099	2,054671	1,14100014	
0,7	4	0,54	0,10	0,10	2,98	0,51	0,17	0,3	1,7	0,46	1,88	0,61	1,0	-1,15503	-0,29205953	-0,2920595	1,1550288	
0,7	5	0,54	0,08	0,06	2,98	0,51	0,07	0,5	1,7	0,41	0,18	0,54	0,0	-0,44707	0,32425467	0,3242547	0,4470679	
0,8	4	0,54	0,10	0,10	3,12	0,43	0,14	0,2	1,7	0,07	0,75	0,35	0,4	0,042122	0,54616495	0,546165	-0,0421223	



Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHИ (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

7 5	54	0	85 7	50	75	29	5	5	33 6	47 6	41 2	98					
+	0, 8 0	0, 78 54	0,1 00 1	0,1 11 1	3, 28 00	0, 36 11	0, 11 11	0, 1, 2	1, 8	0, 35 13 8	1,6 19 95 7	0,4 58 14 9	0,8 87 29	0,303446	0,95136715	0,9513672	-0,3034461
+	0, 8 0	0, 78 54	0,1 00 1	0,1 11 1	3, 28 00	0, 36 11	0, 11 11	0, 2	1, 8	- 0, 13 41	0,8 86 26 1	- 0,1 74 88	0,4 85 42	0,466907	0,21958768	0,2195877	-0,4669068
+	0, 8 5	0, 78 54	0,0 75 1	0,0 81 1	3, 44 50	0, 27 75	0, 08 11	0, 1 5	1, 8 5	0, 37 20 1	0,5 45 42 1	0,4 85 04 7	0,2 98 74	-0,13174	0,55422032	0,5542203	0,13173942
+	0, 8 5	0, 78 54	0,0 75 1	0,0 81 1	3, 44 50	0, 27 75	0, 08 11	0, 1 5	1, 8 5	- 1, 39 64	0,8 02 19 4	- 1,8 20 72	0,4 39 38	1,59813	-0,97675268	-0,9767527	-1,5981296
+	0, 9 0	0, 78 54	0,0 50 2	0,0 52 2	3, 62 00	0, 19 00	0, 05 26	0, 1 1	1, 9	0, 99 59	0,4 32 95	- 1,2 48 14	0,2 37	0,750478	-1,08584015	-1,0858402	-0,7504783
+	0, 9 0	0, 78 54	0,0 50 2	0,0 52 2	3, 62 00	0, 19 00	0, 05 26	0, 1 1	1, 9	- 0, 62 79	0,4 98 78 4	- 0,8 18 64	0,2 73 2	0,772047	-0,38569075	-0,3856907	-0,7720471
+	0, 9 5	0, 78 54	0,0 25 1	0,0 25 1	3, 80 50	0, 09 75	0, 02 56	0, 0 5	1, 9 5	0, 16 78 7	- 1,4 94 86	0,2 - 18 2	- 0,8 18 77	-0,73373	-0,42418304	-0,424183	0,73372906
+	0, 9 8	0, 78 54	0,0 10 1	0,0 10 1	3, 09 08	0, 03 96	0, 01 01	0, 0 2	1, 9 8	- 1, 52 2	- 0,7 21 84	- 1,9 84 51	0,3 95 37	1,123692	-1,68282854	-1,6828285	-1,1236924
(1/20)×sum of squares of values of u-, y-, z-variables ==>										1, 00 00 0	1,0 00 00 0	1,7 00 00 0	0,3 00 00 0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Выводы.

В теореме сформулированы и доказаны здесь и в [2,8] 3 свойства Λ -выборок. Интерпретации свойств Λ -выборок ОМ ГК приведены в [2,8]. В работах [9,10] доказаны теорема-критерий равенства решений прямой и обратной задач анализа главных компонент. Примеры модельной и гистограммной адекватности модельной и реальной Λ -выборок имеются в [11-15]. На гистограммах из [2,8,11] и на гистограммах модельных 1-мерных z-переменных видны одинаковости количеств точек в интервалах разбиений на осях интервалов гистограмм модельной и реальной Λ -выборок. Это-обратная задача: при неизвестной многомерной функции распределения случайного вектора $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_n)$ найти 1-мерное распределение каждой из n зависимых компонент ξ_1, \dots, ξ_n . Решения этой обратной задачи нет [12,13]. Описанных выше свойств достаточно, чтобы, используя полный спектр или спектр с новыми недоминирующими элементами (взамен отсутствующих), можно моделировать [2,10,12-13] Λ -выборки $Z^{(t)}_{mn}$, $t=1, \dots, k_t < \infty$, имеющие одну

и ту же корреляционную матрицу R_{nn} с ее спектром Λ_{nn} . Модельные Λ -выборки, воспроизведенные по *восстановленному* спектру, наравне с Λ -выборками, воспроизведенными по «реальному» спектру, используются в разных предметных областях при решении задачи «извлечения цифровых знаний» из цифровых данных, например, средствами когнитивного моделирования [16,17].

Производственная теорема о Λ -выборках применяется в условиях недостаточно эффективно используемых существующих инструментов, аналитических приемов и программ. Недостаточность числа прикладных работ по АГК, нехватка специалистов, обладающих ресурсами и навыками для извлечения полезной информации, знаний из данных. Нехватка инструментов, способствующих «понимать данные» и направлять исследователя - это проблемы, решаемые научным сообществом. Теорема о Λ -выборках, ее следствия, результаты их применений в значительной степени решают эти проблемы.

References:

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHHI (Russia) = 0.207	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 3.860	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

1. Hotelling H. (1933) Analysis of a complex of statistical variables into principal components.-J.Educ. Psychol., 1933, vol.24, p. 417-441, p. 498-520.
2. Zhanatauov S.U. (2013) Obratnaya model' glavnykh komponent:-monografiya.-Almaty: Kazstatinform, 2013.- 201 p.
3. Zhanatauov S.U. (1980) Metod polucheniya vyborke s zadannymi sobstvennymi chislami ee korrelyatsionnoy matritsy.//Matematicheskie voprosy analiza dannykh. Novosibirsk, 1980. p.62-76.
4. Zhanatauov S.U. (1988) Obratnaya zadacha analiza glavnykh komponent.//Doklady po matematike i ee primeneniya, t.2, vyp.3, 1-yy Vsemirnyy Kongress obshchestva im.Bernulli. Matematicheskaya statistika, teoriya veroyatnostey, kombinatorika i ikh primeneniya. Trudy. Sektsiya 4 », M.:Nauka,1988. p.331-335.
5. Zhanatauov S.U. (1987) The inverse problem of the principal component analysis//Proc. of the 1-st World Congress of Soc.Math.Statist. and Probability Theory of Bernoulli.-Utrecht, 1987. - p.116-119.
6. Fursov V.G. (2013) Innovatsionnaya napravlenost' nauchnogo issledovaniya (retsenziya na monografiyu Zhanatauova S.U.«Obratnaya model' glavnykh komponent».-Almaty: Kazstatinform,2013.-201p.). Vestnik KazNTU,№1, p.370-373.
7. Zhanatauov S.U. (2014) The inverse problem, inverse model, invertible model. «International Conference "Science: Integrating Theory and Practice"(February 24-25. 2014), Bozeman, Montana, USA/ICET (Intern.Center of Education&Technology,USA). "International Academic Research Conference on Business, Education, Nature and Technology". p.447-449.
8. Zhanatauov S.U. (1987) Obratnaya model' glavnykh komponent i ee primeneniye. Diss. na soiskanie uch. step..kand.fiz.-mat.nauk: 05.13.11: zashchishchena 8.12. 1987: utv.1.06.1988/Zhanatauov Sapargali Utepovich -Vychislitel'nyy tsentr Sibirskogo otdeleniya AN SSSR, Novosibirsk, 1987, 302 p.
9. Zhanatauov S.U. (2013) The criterion of equality of solutions of the direct and inverse problems of the principal component analysis.«Seattle-2013:4th International Academic Research Conference on Business, Education, Nature and Technology». 4-5 November 2013, p.447-449.
10. Zhanatauov S.U. (2014) Teorema-kriteriy ravenstva resheniy pryamoy i obratnoy zadachi analiza glavnykh komponent. Evraziyskiy soyuz uchenykh.X mezhd. konf.«Sovrem.kontseptsii nauchn. issled.».Moscow, 27-30 dec. 2014. p.55-58.
11. Chalmers C.P. (1975) Generation of correlation matrices with a given eigen – structure.-J. Stat. Comp. Simul., 1975, vol.4, p.133-139.
12. Zhanatauov S.U. (2016) Model and histogram to adequacy of variables (C,Λ)-samples and real multidimensional sample. International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. 2016, № 11, vol. 43, pp. 53-61. <http://t-science.org>
13. Zhanatauov S.U. (2017) Modelirovanie mnogomernykh vyborok znacheniy priznakov zernovoy kul'tury. "II mezhdun. nauchno-prakt.konf. «Evropa i tyurkskiy mir: nauka, tekhnika i tekhnologii".Izmir (Turtsiya), 29-31 maya 2017. www.regionacadem.org
14. Zhanatauov S.U. (2013) Kognitivnaya karta i model' sotsial'no-ekonomicheskikh faktorov kar'ernoy uspeshnosti shkol'nikov munitsipal'nykh shkol SShA. Sibirskiy pedagogicheskiy zhurnal. 2013, №6, p.28-33.
15. Zhanatauov S.U. (2014) Analiz budushchikh debitorskoy i kreditorskoy zadolzhennostey munitsipalitetov gorodov.Ekonomicheskii analiz: teoriya i praktika. M.:№2 (353), 2014, p. 54-62.
16. Zhanatauov S.U. (2015) Kognitivnaya karta i kognitivnaya model' analiza glavnykh komponent (telekommunikatsionnaya otrasl').Natsional'naya assotsiatsiya uchenykh (NAU).IX Mezhd. nauch.-prakt. konf. «Otechestvennaya nauka v epokhu izmeneniy:postulaty proshlogo i teorii novogo vremeni». Rossiya, Ekaterinburg, 16-17 may. 2015. p. 55-58.
17. Zhanatauov S.U. (2017) A model of calculation risk changing of the interest rate "yield to maturity date" for foreign currency bonds of the republic of Kazakhstan. International scientific journal Theoretical&Applied Science. 2017,№ 8, vol. 52, p. 19-36. <http://t-science.org>
18. Zhanatauov S.U. (1988) O funktsional'nom napolnenii PPP "Spektr". Sistemnoe modelirovanie-13 .-Novosibirsk, 1988, p.3-11.
19. Zhanatauov S.U. (1987) Dialogovyy paket programm modelirovaniya spektra neizvestnoy korrelyatsionnoy matritsy.//Dialogovye sistemy v zadachakh upravleniya. Novosibirsk, 1987.- p.157-163.
20. Zhanatauov S.U. (2011) Virtual'naya laboratoriya. Mater.Vseross. nauchno-praktich. konf. «Innovatsii v nauke–puti razvitiya».-Cheboksary: 2011.p.33 – 44.

