

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 4.102
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2018 Issue: 10 Volume: 66

Published: 05.10.2018 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

Jamol Khujaev
Senior Researcher, PhD,
Scientific And Innovation Center
Of Information And Communication Technologies
Tashkent, Uzbekistan
jamolhoja@mail.ru

Komil Shaimov
Assistant professor, Samarkand State Institute of
Architecture and Construction,
Samarkand, Uzbekistan

Tursun Shafiyev
Assistant professor, Bukhara State University,
Bukhara, Uzbekistan

APPLICATION OF THE DIFFERENTIAL-DIFFERENCE METHOD FOR SOLVING THE PROBLEMS ABOUT THE CURRENT OF THE INCOMPRESSIBLE LIQUID IN THE RECTANGULAR AREA AT THE SMALL NUMBERS OF THE REINOLDS

Abstract: In this paper, we propose a method of applying the method of lines, which has been developed in detail for the Dirichlet problem, in solving two-dimensional problems of hydrodynamics. The advantage of the method is to exclude the input of fictitious time in solving the equations of the current and pressure function, since finite-difference equations with respect to two Cartesian coordinates are solved simultaneously and accurately. The structure of the main tridiagonal matrices of the transition to finite difference equations remains the same for the case of using separate equations of the stream function, vorticity, and pressure. For the exact solution of finite-difference equations, the eigenvalues and vectors of the basic transition matrix are attracted, the values of the elements of which are calculated only once.

Key words: Navier-Stokes equations and continuity, velocities in coordinates, pressure, stream function, vorticity, finite-difference method, matrix representation of finite-difference equations, diagonalization, transition formulas.

Language: Russian

Citation: Khujaev, J., Shaimov, K., & Shafiyev, T. (2018). Application of the differential-difference method for solving the problems about the current of the incompressible liquid in the rectangular area at the small numbers of the Reynolds. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 10 (66), 37-44.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-66-5> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.10.66.5>

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ТЕЧЕНИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Аннотация: В работе предлагается способ применения метода прямых, который подробно разработан для задачи Дирихле, при решении двухмерных задач гидродинамики. Преимущество метода заключается в исключении ввода фиктивного времени при решении уравнений функции тока и давления, так как конечноразностные уравнения по двум декартовым координатам решаются одновременно и точно. Структура основных трехдиагональных матриц перехода к конечноразностным уравнениям остается одинаковой для случая использования отдельных уравнений функции тока, завихренности и



давления. Для точного решения конечноразностных уравнений привлекаются собственные числа и векторы основной матрицы перехода, значения элементов которых вычисляются только один раз.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса и неразрывности, скорости по координатам, давление, функция тока, завихренность, конечноразностный метод, матричное представление конечноразностных уравнений, диагонализация, формулы перехода.

Введение.

Задачи гидродинамики отличаются нелинейностью уравнений сохранения субстанций. Даже в кажущемся простом приближении несжимаемой жидкости конвективные члены являются нелинейными. Т.к. аналитическое решение задач гидродинамики трудное дело, то обращаются к численным методам [1-5]. Для решения двухмерных задач широко используется подход с привлечением уравнений функции тока и завихренности, которые имеют соответственно эллиптический и параболический типы [3-4]. Подход полезен тем, что уравнения относительно искомого – функции тока, завихренности и давления получаются линейными. Известные способы решения уравнения функции тока построены с введением фиктивного времени. Сущность данной своеобразной параболизации заключается в согласовании результатов прогонки по двум координатам.

Ниже предлагается версия метода прямых, при использовании которой отпадает необходимость согласования результатов прогонки по двум осям, так как метод позволяет получить точное решение эллиптического уравнения из конечноразностных уравнений без привлечения фиктивного времени.

Основы метода прямых для задачи Дирихле приведены в работах В.Н.Фаддеевой (1949), а многочисленные применения метода к различным двух-итрехмерным задачам описаны в монографии С.Каримбердиевой (1984) [6]. Модификации метода для граничных условий первого и второго, второго и первого, а также второго родов приведены в работах [7-9].

Сначала представим метод прямых для эллиптического и параболического уравнений в прямоугольной области расчета. А далее используем метод для решения задач гидродинамики.

Постановка задачи. Положим, что на границах прямоугольника с размерами 1 и l граничные условия заданы в виде

$$\begin{aligned} \psi(0, y) &= \mu_{x0}(y), & \psi(1, y) &= \mu_{xl}(y), \\ \psi(x, 0) &= \mu_{y0}(x), & \psi(x, l) &= \mu_{yl}(x). \end{aligned}$$

Уравнение функции тока, составленное из уравнения неразрывности, имеет вид [3]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta,$$

где $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ - завихренность, а связь между скоростями потока и функции тока задана в виде $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$.

Считаем, что значение завихренности определено для n -го предыдущего шага времени в виде $\zeta_{i,j}^n$, где $i \in [0, N_x + 1], j \in [0, N_y + 1]$ и $n \in [0, N_t]$ дискретные координаты по двум координатами и времени по равномерными шагами h_x, h_y и τ .

Во внутренних узлах расчетной области аппроксимация уравнения функции тока составляет

$$\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{\partial^2 \psi_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} = -\zeta_{i,j}^n.$$

В частности, при $i=1$ и $i=N_x$ используются граничные значения функции тока $\mu_{0,j}^{n+1}$ и $\mu_{N_x+1,j}^{n+1}$.

Составим матричное уравнение

$$\frac{1}{h_x^2} A_j^{(x)} U_j + \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} = F_j, \tag{1}$$

где $U_j = (\psi_{1,j}^{n+1}, \psi_{2,j}^{n+1}, \dots, \psi_{N_x-1,j}^{n+1}, \psi_{N_x,j}^{n+1})^T$,

$$F_j = \left(-\zeta_{1,j}^n - \frac{\mu_{0,j}^{n+1}}{h_x^2}, -\zeta_{2,j}^n, \dots, \right.$$

$$\left. \zeta_{N_x-1,j}^n, -\zeta_{N_x,j}^n - \frac{\mu_{N_x+1,j}^{n+1}}{h_x^2} \right)^T$$

$$= (f_{1,j}, f_{2,j}, \dots, f_{N_x-1,j}, f_{N_x,j})^T,$$

$$A_j^{(x)} = \left\| a_{p,q}^{(x)} \right\|_{N_x} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}_{N_x}.$$

Верхний знак «Т» означает операцию транспонирования матрицы. Индексы искомого и элементов матрицы меняются от 1 до N_x .

Матрица $A_j^{(x)}$ имеет диагональное преобладание, принадлежит якобиевому типу и поэтому ее можно представить в виде [6]:

$$A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1},$$

где B_x – фундаментальная матрица, составленная из собственных векторов матрицы $A_j^{(x)}$; B_x^{-1} – обратная B_x матрица; Λ_x – диагональная матрица, ненулевые элементы которой представляют собственные числа матрицы $A_j^{(x)}$.

В [6] приведены значения элементов диагональной матрицы

$$\lambda_s^{(x)} = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{N_x + 1} \right),$$

а также фундаментальной B_x и обратной ей B_x^{-1} матриц

$$b_{s,p}^{(x)} = b_{s,p}^{(x)-} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x + 1}} \sin \frac{\pi s p}{N_x + 1}.$$

Умножим обеих сторон уравнения (1) на B_x^{-1} слева и получим

$$\frac{1}{h_x^2} B_x^{-1} A_j^{(x)} U_j + \frac{\partial^2 B_x^{-1} U_j}{\partial y^2} = B_x^{-1} F_j.$$

Здесь учитывали свойство коммутативности операций дифференцирования и умножения матриц.

Т.к. $A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1}$, то

$$\begin{aligned} B_x^{-1} A_j^{(x)} U_j &= B_x^{-1} B_x \Lambda_x B_x^{-1} U_j = \\ &= (B_x^{-1} B_x) \Lambda_x (B_x^{-1} U_j) = \Lambda_x \tilde{U}_j = \\ &= \left(\lambda_1^{(x)} \tilde{\psi}_{1,j}, \lambda_2^{(x)} \tilde{\psi}_{2,j}, \lambda_{N_x-1}^{(x)} \tilde{\psi}_{N_x-1,j}, \lambda_{N_x}^{(x)} \tilde{\psi}_{N_x,j} \right)^T. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если ввести новый вектор-столбец

$$\begin{aligned} \tilde{U}_j &= \left(\tilde{\psi}_{1,j}, \tilde{\psi}_{2,j}, \dots, \tilde{\psi}_{N_x-1,j}, \tilde{\psi}_{N_x,j} \right)^T = \\ &= B_x^{-1} U_j = B_x U_j = \\ &= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{1,p}^{(x)} \psi_{p,j}^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{2,p}^{(x)} \psi_{p,j}^{n+1}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x-1,p}^{(x)} \psi_{p,j}^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x,p}^{(x)} \psi_{p,j}^{n+1} \right)^T \end{aligned}$$

то последнее уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{h_x^2} \Lambda_x \tilde{U}_j + \frac{\partial^2 \tilde{U}_j}{\partial y^2} = \tilde{F}_j, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j &= \left(\tilde{f}_{1,j}, \tilde{f}_{2,j}, \dots, \tilde{f}_{N_x-1,j}, \tilde{f}_{N_x,j} \right)^T = \\ &= B_x^{-1} F_j = B_x F_j = \\ &= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{1,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{2,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x-1,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1}, \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1} \right)^T \end{aligned}$$

Из последнего матричного уравнения можно выделить отдельное обыкновенное уравнение относительно $\tilde{\psi}_{i,j}$ при $i=1..N_x$ и $j=1..N_y$:

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,j} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_{i,j}}{\partial y^2} = \tilde{f}_{i,j}. \quad (3)$$

Согласно введенной замене переменных

$\tilde{\psi}_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \psi_{p,j}^{n+1}$ формируем граничные условия

для вновь введенной искомой функции $\tilde{\psi}_{i,j}$.

Тогда при $j=0$ и $j=N_y+1$ имеем

$$\tilde{\mu}_{i,0} = \tilde{\psi}_{i,0} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \mu_{p,0},$$

$$\tilde{\mu}_{i,N_y+1} = \tilde{\psi}_{i,N_y+1} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \mu_{p,N_y+1}$$

Теперь аппроксимируем уравнение (3) при $i=1..N_x$ для внутренних узлов $j=1..N_y$:

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,j} + \frac{\tilde{\psi}_{i,j+1} - 2\tilde{\psi}_{i,j} + \tilde{\psi}_{i,j-1}}{h_y^2} = \tilde{f}_{i,j}.$$

При $j=1$ и $j=N_y$ реализуются граничные условия:

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,1} + \frac{\tilde{\psi}_{i,2} - 2\tilde{\psi}_{i,1} + \tilde{\mu}_{i,0}}{h_y^2} = \tilde{f}_{i,1},$$

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,N_y} + \frac{\tilde{\mu}_{i,N_y+1} - 2\tilde{\psi}_{i,N_y} + \tilde{\psi}_{i,N_y-1}}{h_y^2} = \tilde{f}_{i,N_y}$$

Составим новое матричное уравнение:

$$\frac{1}{h_x^2} \bar{\Lambda} \bar{U}_i + \frac{1}{h_y^2} A_i^{(y)} \bar{U}_i = \bar{F}_i. \quad (4)$$

Здесь

$$\bar{U}_i = \left(\tilde{\psi}_{i,1}, \tilde{\psi}_{i,2}, \dots, \tilde{\psi}_{i,N_y-1}, \tilde{\psi}_{i,N_y} \right)^T,$$

$$(\text{т.е. } \tilde{\psi}_{i,j} = \tilde{\psi}_{i,j})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_j &= \left(\tilde{f}_{i,1} - \frac{\tilde{\mu}_{i,0}}{h_y^2}, \tilde{f}_{i,2}, \dots, \right. \\ &\left. \tilde{f}_{i,N_y-1}, \tilde{f}_{i,N_y} - \frac{\tilde{\mu}_{i,N_y+1}}{h_y^2} \right)^T = \\ &= \left(\tilde{f}_{i,1}, \tilde{f}_{i,2}, \dots, \tilde{f}_{i,N_y-1}, \tilde{f}_{i,N_y} \right)^T, \\ \bar{\Lambda} \tilde{U}_i &= \left(\lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,1}, \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,2}, \dots, \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,N_y-1}, \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,N_y} \right)^T \\ A_i^{(y)} &= \left\| a_{p,q}^{(y)} \right\|_{N_y} = \\ &= \left\| \begin{array}{cccccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{array} \right\|_{N_y} \end{aligned}$$

Теперь для $A_i^{(y)}$ составим фундаментальную матрицу B_y с элементами

$$b_{s,p}^{(y)} = b_{s,p}^{(y)-} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_y+1}} \sin \frac{\pi s p}{N_y+1} \quad \text{и}$$

диагональную матрицу Λ_y с диагональными

$$\text{элементами } \lambda_s^{(y)} = -2 \left(1 + \cos \frac{\pi s}{N_y+1} \right). \quad \text{Для}$$

обратной B_y матрицы уместно равенство

$$B_y^{-1} = B_y. \quad \text{Для квадратной области расчета они}$$

совпадают с аналогичными матрицами для случая диагонализации матрицы перехода по x .

Умножим обеих сторон уравнения (4) на B_y^{-1} слева и получим

$$\frac{1}{h_x^2} B_y^{-1} \bar{\Lambda} \tilde{U}_i + \frac{1}{h_y^2} B_y^{-1} A_i^{(y)} \tilde{U}_i = B_y^{-1} \tilde{F}_i.$$

Части данного уравнения преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_y^{-1} \tilde{U}_i &= B_y \tilde{U}_i = \\ &= \left(\tilde{\psi}_{i,1}, \tilde{\psi}_{i,2}, \dots, \tilde{\psi}_{i,N_y-1}, \tilde{\psi}_{i,N_y} \right)^T = \tilde{U}_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_y^{-1} A_i^{(y)} \tilde{U}_i &= \Lambda_y \tilde{U}_i = \\ &= \left(\lambda_1^{(y)} \tilde{\psi}_{i,1}, \lambda_2^{(y)} \tilde{\psi}_{i,2}, \lambda_{N_y-1}^{(y)} \tilde{\psi}_{i,N_y-1}, \lambda_{N_y}^{(y)} \tilde{\psi}_{i,N_y} \right)^T, \\ B_y^{-1} \bar{\Lambda} \tilde{U}_i &= \lambda_i^{(x)} \left(\tilde{\psi}_{i,1}, \tilde{\psi}_{i,2}, \dots, \tilde{\psi}_{i,N_y-1}, \tilde{\psi}_{i,N_y} \right)^T = \\ &= \bar{\Lambda}_x \tilde{U}_i, \end{aligned}$$

$$B_y^{-1} \tilde{F}_i = B_y \tilde{F}_i = \left(\tilde{f}_{i,1}, \tilde{f}_{i,2}, \dots, \tilde{f}_{i,N_y-1}, \tilde{f}_{i,N_y} \right)^T = \tilde{F}_i.$$

В результате этих видоизменений матричное уравнение приобретает вид:

$$\frac{1}{h_x^2} \bar{\Lambda}_x \tilde{U}_i + \frac{1}{h_y^2} \Lambda_y \tilde{U}_i = \tilde{F}_i.$$

Отсюда можно выделить отдельное уравнение

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\psi}_{i,j} + \frac{1}{h_y^2} \lambda_2^{(y)} \tilde{\psi}_{i,j} = \tilde{f}_{i,j}.$$

Из этого линейного уравнения находим решение для внутренних узлов

$$\tilde{\psi}_{i,j} = \tilde{f}_{i,2} / \left(\frac{\lambda_i^{(x)}}{h_x^2} + \frac{\lambda_j^{(y)}}{h_y^2} \right).$$

Обратный переход к искомой функции, согласно введенным заменам и самосопряженности матриц B_x и B_y , составляет

$$\tilde{\psi}_{i,j}^{n+1} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)} \tilde{\psi}_{p,q},$$

где учитывали возможной нестационарной постановки задачи, когда граничные условия зависят от времени или применяется метод установления при совместном решении с уравнением завихренности.

Как видно, при использовании метода прямых получено точное решение из системы конечноразностных уравнений в рамках использованной схемы аппроксимации.

Метод решения.

Метод решения задачи о завихренности.

Если конвективная часть обезразмеренного уравнения завихренности

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

достаточно гладкая со своими производными и/или критерий Рейнольдса $\text{Re} = l_x U / \nu$ (l_x – масштабная длина, U – характерная скорость, ν – кинематическая вязкость жидкости) имеет малое значение, то при решении уравнения можно применить метод прямых.

Граничные условия уравнения обозначим как в предыдущем случае, и считаем, что они заданы.

Во внутренних узлах $i=1..N_x$ и $j=1..N_y$

расчетной области конвективную часть уравнения аппроксимируем со вторым порядком точности по координатам:

$$\phi'_{i,j} = -\frac{u_{i,j}^{n+1}}{2h_x} (\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}) - \frac{v_{i,j}^{n+1}}{2h_y} (\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1})$$

При этом уравнение в целом аппроксимируется по оси x в виде

$$\frac{\partial \zeta_{i,j}^{n+1}}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - 2\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} + \frac{\partial^2 \zeta_{i,j}^{n+1}}{\partial y^2} \right) + \phi'_{i,j}$$

При $i=1$ и $i=N_x$ реализуются граничные условия $\mu_{0,j}^{n+1}$ и $\mu_{N_x+1,j}^{n+1}$.

Далее повторим все этапы решения функции тока, реализуем аппроксимацию по времени шагом назад и приходим к уравнениям

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\tau_n} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \zeta_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{h_y^2} \lambda_j^{(y)} \zeta_{i,j}^{n+1} \right) + \tilde{\phi}_{i,j}^{n+1}$$

Из этого линейного уравнения находим решения для внутренних узлов

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \frac{\zeta_{i,j}^n + \tau_n \tilde{\phi}_{i,j}^{n+1}}{1 - \frac{\tau_n \lambda_i^{(x)}}{h_x^2 \text{Re}} - \frac{\tau_n \lambda_j^{(y)}}{h_y^2 \text{Re}}}$$

Начальное условие для $\zeta_{i,j}^0$ определяется согласно формуле

$$\zeta_{i,j}^0 = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)} \zeta_{p,q}^0$$

где $\zeta_{p,q}^0$ – начальное значение функции в узле (p,q) .

Формула обратного перехода к безразмерной завихренности аналогична формуле перехода к функции тока.

Так как для собственных значений полученных выше трехдиагональных матриц имеет место неравенства $-4 < \lambda_i^{(x)}, \lambda_j^{(y)} < 0$ [7],

то для знаменателя $\zeta_{i,j}^{n+1}$ уместна оценка

$$1 < 1 - \frac{\tau_n \lambda_i^{(x)}}{h_x^2 \text{Re}} - \frac{\tau_n \lambda_j^{(y)}}{h_y^2 \text{Re}} < 1 + \frac{4}{\text{Re}} \left(\frac{\tau_n}{h_x^2} + \frac{\tau_n}{h_y^2} \right)$$

Т.е. не надо опасаться от образования нуля в знаменателе при вычислении значения $\zeta_{i,j}^{n+1}$. Аналогичная оценка показывает, что при вычислении $\tilde{\psi}_{i,j}^{n+1}$ значение знаменателя не будет нулевым.

Особенностью полученного решения $\zeta_{i,j}^{n+1}$ заключается в том, что оно сильно зависит от начального значения. Ненулевое начальное значение, как это показали результаты вычислительного эксперимента, может привести к динамической неустойчивости. Поэтому начальное значение для завихренности целесообразно принимать нулевым, что не противоречит постановкам различных задач, или же брать из результатов расчета, полученного при меньших числах Рейнольдса.

Метод решения уравнения давления, которое в безразмерных переменных имеет вид [3-4]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = S,$$

где $S = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ или

$$S = 4 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right)$$

Граничными условиями его являются

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=1: \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ и } \frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=l: \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ и } \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Как видно, граничные условия второго рода и решение получится до точности аддитивной постоянной. Притом, граничные условия определены приближенными решениями уравнений функции тока и завихренности. Но при этом надо перейти к точному воспроизведению физических условий границ и применить метод прямых. Такое возможно при введении новой искомой функции

$$q(x, y) = \frac{\partial p(x, y)}{\partial x}$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial S}{\partial x},$$

а граничные условия –

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=1: q(x, y) = 0.$$

$$\text{при } y=0 \text{ и } y=l: \frac{\partial q(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Чтобы облегчить запись, правую часть уравнения обозначим через $f(x, y, t) = \frac{\partial S}{\partial x}$ и

придем к задаче, аналогичной задаче о функции тока. Метод прямых нельзя использовать по продольной координате, так как на границах заданы производные, а не сама функция. Поэтому предлагаем использовать положения дифференциально-разностного метода: по продольной координате используем метод прямых с введением $\tilde{q}_{i,j}$, а по поперечной координате – обычную прогонку для решения конечноразностных уравнений относительно $\tilde{q}_{i,j}$, которые построены со вторым порядком

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

точности. Обратный переход к $q_{i,j}$

осуществляется по сумме $q_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \tilde{q}_{p,j}$.

Далее полагая $p_{0,0} = 0$, для $j = 1..N_y + 1$ находим значения давления на границе $x = 0$

$$p_{0,j} = p_{0,j-1} + \frac{h_y}{\text{Re} h_x} \left(-3\zeta_{0,j} + 4\zeta_{1,j} - \zeta_{2,j} - 3\zeta_{0,j-1} + 4\zeta_{1,j-1} - \zeta_{2,j-1} \right)$$

и для каждого внутреннего слоя по j и $i = 0, \dots, N_x$ составим цикл

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} + \frac{h_x}{2} (q_{i+1,j} + q_{i,j}).$$

Для определения значений давления при $j = 0$ пользовались условием $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, которого аппроксимировали вторым порядком точности и получили формулу для $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$

$$p_{i,0} = \frac{4p_{i,1} - p_{i,2}}{3}.$$

Аналогичная формула составляется для $j = N_y + 1$ при $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$:

$$p_{i,N_y+1} = \frac{4p_{i,N_y} - p_{i,N_y-1}}{3}.$$

Вычислительный эксперимент и анализ численных расчетов.

Организация вычислительного процесса. После описания используемых скалярных,

векторных и матричных величин, формировали фундаментальную и диагональную матриц и задали начальные значения для завихренности. После этого организовали процесс установления для функции тока и завихренности. При выполнении условий установления переходили к расчету поле давления.

Результаты вычислительного эксперимента.

Каждый из трех вариантов применения метода прямых апробировали на тестовых задачах по теплопередаче.

Они дали хорошее согласие с точными решениями задач и позволили значительно сократить время расчета. После этого метод применили к задачам гидродинамики.

В качестве примера рассматривали классическую задачу о движении жидкости в квадратной области, одна граница которого имеет постоянную скорость, а остальные границы – неподвижны [4, 5]. Представим изолинии функции тока, полученные при $\text{Re} = 10$ и $\text{Re} = 100$, которые согласуются с результатами цитируемых источников.

Программное средство имеет модульную структуру. Основной модуль предназначен для подготовки и ввода основных параметров процесса (скорость воздушной массы, коэффициент диффузии, коэффициент поглощения вредных веществ в атмосфере, мощность источника, время расчета на ЭВМ, шаг интегрирования по времени и пространственным переменным, вид ингредиента, координаты эмиттера вредных веществ).

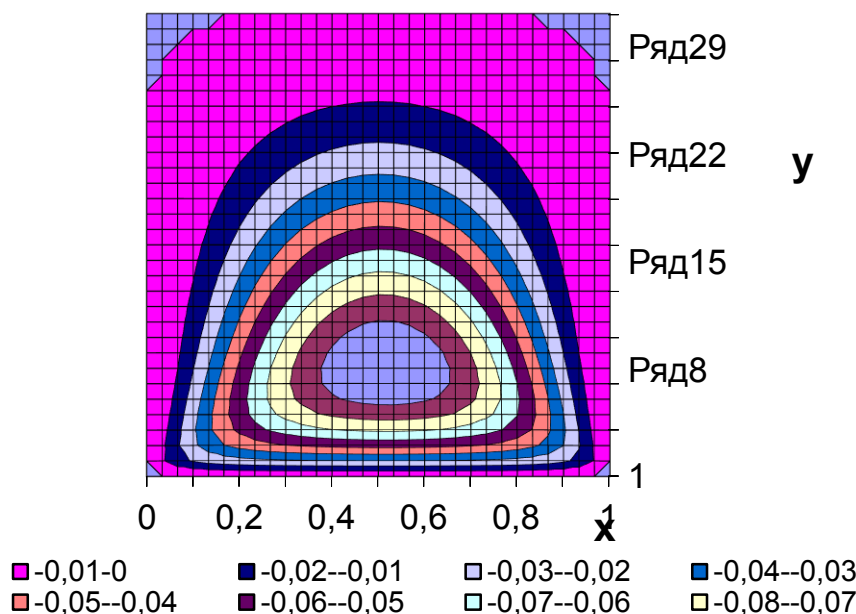


Рис. 1. Изолинии функции тока, полученные при $\text{Re} = 10$. $N_x = N_y = 29$, $N_t = 81$. Точность 0,01.

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИИ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

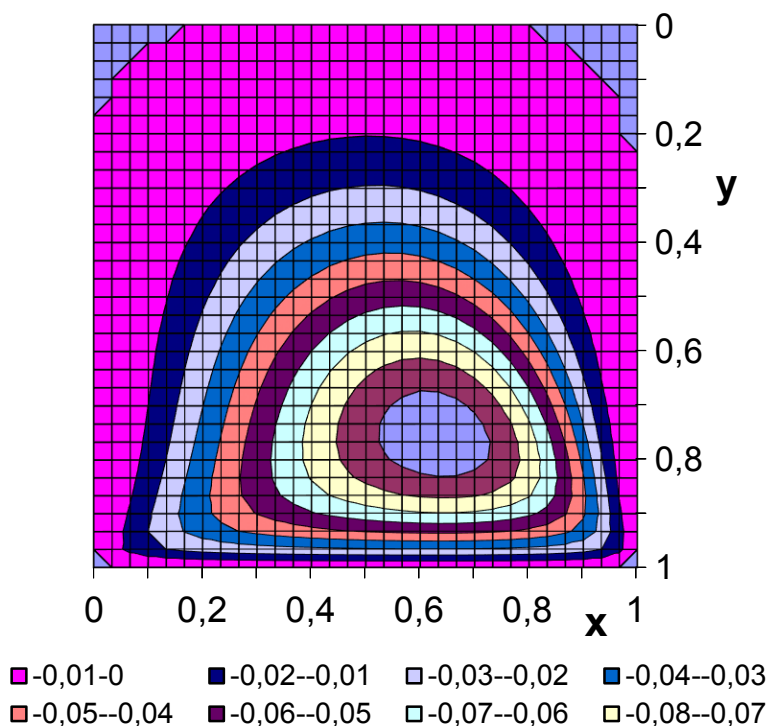


Рис. 2. Изолинии функции тока, полученные при $Re = 100$. $N_x = N_y = 29$, $N_t = 81$. Точность 0,01.

Выводы.

Применение метода прямых, который разработан для задачи Дирихле при постоянных значениях коэффициента оператора Лапласа, к задачам гидродинамики значительно сокращает время расчета и увеличивает точность решения. Демонстрировали варианты полной и частичной реализации метода прямых при решении уравнений эллиптического и параболического типов. Его можно использовать для решения трехмерных задач, а также уравнения гиперболического типа. Метод допускает

применения положений параллельных вычислений.

Приведенный алгоритм можно использовать для решения задач с большим числом Рейнольдса. Для этого при решении уравнения завихренности, как показали результаты вычислительного эксперимента, необходимо использовать схему против потока А.А.Самарского с поправкой на вычислительную вязкость [4].

References:

1. Samarskiy, A.A., & Vabishchevich, P.N. (2003). *Vychislitel'naya teploperedacha*. Moscow, Editorial URSS, pp. 1-784.
2. Marchuk, G.I. (1977). *Metody vychislitel'noy matematiki*. Moscow, Nauka, pp. 1-456.
3. Anderson, D., Tannehill, D., & Pletcher, R. (1990). *Vychislitel'naya gidromekhanika i teploobmen*. V 2-kh t. Per. s ang., Moscow, Mir, p.728, 1-y tom, pp.1-392.
4. Paskonov, V.M., Polezhaev, V.I., & Chudov, L.A. (1984). *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena*. Moscow, Nauka, pp.1-288.
5. Faddeev, D.K., & Faddeeva, V.N. (1963). *Vychislitel'nye metody lineynoy algebrы*. Moscow, Fizmatgiz.
6. Khuzhaev, I.K., Khuzhaev, Z.I., & Ravshanov Z.N. (2017). Analiticheskoe reshenie zadachi o sobstvennykh znacheniyakh i vektorakh matritsy perekhoda iz parabolicheskogo uravneniya k konechno-raznostnym uravneniyam pri reshenii zadachi Dirikhle.

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 4.102	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

Uzbekskiy zhurnal: Problemy informatiki i energetiki, Tashkent, №2, 12-19.

7. Karimov, I.K., Khuzhaev, I.K., & Khuzhaev, Z.I. (2018). Primenenie metoda pryamykh pri reshenii odnomernogo uravneniya parabolicheskogo tipa pri granichnykh usloviyakh vtorogo i pervogo rodov. *Vestnik KRAUNTS, 1 (21)*, 78-93.
8. Khuzhaev, I.K., Khuzhaev, Z.I., & Ravshanov, Z.N. (2017). Chislenno-analiticheskie metody resheniya zadach na sobstvennye chisla i

vektora dlya metoda pryamykh na pryamougol'nykh oblastiakh. *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki, Tashkent, №4(10)*, 76-83.

9. Aliev, F.A., Khuzhaev, Z.I., & Ravshanov, Z.N. (2017). Differentsial'no-raznostnyy metod dlya resheniya odnomernykh uravneniy parabolicheskogo tipa pri granichnykh usloviyakh pervogo i vtorogo rodov. *Nauchnyy vestnik Andizhanskogo natsional'nogo universiteta, Andizhan, №4*, 5-10.

