SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 10 **Volume:** 66

Published: 06.10.2018 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

M. Mamatqulov
Teacher,
Tashkent institute of Textile and Light Industry

Orifjon Shodiyevich Bozorov
Senior researcher,
Tashkent institute of Textile and Light Industry

Ismatulla Qushayevich Khujaev
Leading researcher,
Scientific and innovation center of information and communication technologies at
Tashkent university of information technologies

INTERACTION OPPOSING TRAVELLING IMPULSES IN PIPELINES

Abstract: *Analytical solutions of the problem of counterpropagating waves in a horizontal pipeline with a constant cross-sectional area, which differ significantly from counterpropagating waves in unbounded space, are presented.*

In mathematical modeling, the equations of N.E. Zhukovsky on the pipeline transportation of real liquids are used. The solutions are constructed and analyzed for the constant and density-dependent values of the velocity of propagation of small pressure perturbations in the liquid-pipe system, when the hydrodynamic velocity is much less than the speed of sound and when they are close. It is proved that at a variable value of the sound velocity the hydrodynamic velocity decreases due to the counter propagating wave.

The results are useful for studying the features of the operation of pipelines in conditions of impulse propagation and for an adequate assessment of the energy intensity of the process of pipeline transportation of various media.

Key words: *pipeline, the laws of conservation of mass and momentum, the friction force, small pressure perturbations, hydrodynamic speed, nonlinearity.*

Language: *Russian*

Citation: Mamatqulov, M., Bozorov, O.S., & Khujaev, I.Q. (2018). Interaction opposing travelling impulses in pipelines. *ISJ Theoretical & Applied Science, 10 (66),* 48-53.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-10-66-7 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.10.66.7

УДК 622.69+536-33(075)

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВСТРЕЧНЫХ БЕГУЩИХ ИМПУЛЬСОВ В ТРУБОПРОВОДАХ

Аннотация: *Представлены аналитические решения задачи о встречных волнах в горизонтальном трубопроводе с постоянной площадью поперечного сечения, которые существенно отличаются от встречных волн, происходящих в неограниченном пространстве.*

При математическом моделировании использованы уравнения Н.Е. Жуковского по трубопроводной транспортировке реальных жидкостей. Решения построены и анализированы для постоянного и зависящего от плотности среды значений скорости распространения малых возмущений давления в системе жидкость-труба, когда гидродинамическая скорость намного меньше скорости звука и когда они близки. Доказано, что при переменном значении скорости звука гидродинамическая скорость уменьшается за счет встречной волны.

Результаты полезны для изучения особенностей функционирования трубопроводов в условиях распространения импульса и для адекватной оценки энергоемкости процесса трубопроводной транспортировки различных сред.

Ключевые слова: *трубопровод, законы сохранения массы и импульса, сила трения, малые возмущения давления, гидродинамическая скорость, нелинейность.*

Introduction

Одним из актуальных направлений гидродинамики является изучение нелинейных гидродинамических явлений путем разработки новых способов решения задач. Образование скачка импульсов и обратных волн, их распространение и взаимодействие занимают особый статус в машиностроении, в химической технологии, при передаче механической энергии и флюидов на расстояние трубопроводами и других объектах. Это связано как энергоемкости исследуемых процессов, также надежности функционирования технологических объектов и самых объектов. Разрабатываемые фундаментальные методы аналитического решения нелинейных задач гидродинамики позволяют перейти к решению отдельных задач технологии, которые способствуют разработке энергосберегающих технологий и надежных в эксплуатации объектов для нужд различных отраслей народного хозяйства.

Materials and Methods

При всех исследованиях для описания сопротивления использовали квадратичное приближение, а для динамики потока жидкостей и газов использовали линеаризацию, аппроксимирующий механизм нелинейного гидродинамического сопротивления, которая пригодна только для ограниченного круга задач [1-3].

Более адекватное моделирование движения сплошных сред приводит к сложным нелинейным уравнениям в частных производных. Факторы геометрической и физической нелинейности для плоских волн впервые были рассмотрены Риманом и введением нелинейных фаз и получено решение. К сожалению, дальнейшая эволюция точных решений гидродинамических задач с учетом конечности отбрасываемых квадратичных нелинейных членов зашла в тупик.

Исследование нелинейных задач гидродинамики развивалось по двум направлениям.

Первое направление – это гидродинамика потока жидкостей и газов с различными граничными условиями. Для анализа этих явлений применены физические упрощения – малое число Маха, малое внутреннее трение и малое трение между стенками и потоком. Также были сделаны упрощения – анализ двухмерных моделей, анализ усредненных динамических переменных и анализ одномерных моделей для потоков в трубопроводах.

Второе направление – это область гидродинамики, называемая нелинейной акустикой, где в качестве упрощения исходных уравнений использовали условие, что число Маха – отношение скорости частицы к скорости звука намного меньше единицы [4]. Также предполагалось, что изменения давления и плотности имеют порядок числа Маха M. Развитие такого подхода привело к распространению его для задач с малой диссипацией энергии. Были получены точные решения уравнения Бюргерса, отражающие волны.

Использование метода медленно меняющегося профиля, развитое Дж.Уиземом (США) [5,6] позволило получить хорошие результаты. Были подробно исследованы также образование ударной волны с помощью решения Римана и Бюргерса. Притом решение уравнения Бюргерса получено с помощью бегущих волн с фазами и вводя медленное этих волн, для некоторых задач составляли уравнения относительно или посредством усреднения.

При исследовании стоячих волн получен ряд результатов с помощью введения калибровочных функций, соответствующих прямой и обратной волн, в работах [7-11].

Ниже рассматривается задача о взаимодействии встречных волн в трубопроводах. Для описания процесса распространения волн используются уравнения Н.Е. Жуковского, учитывающие взаимодействие тонких упругих стен и жидкости/газа [1]. Они составлены для длинных трубопроводов и при упрощении уравнений путем линеаризации позволяют получить точные аналитические решения. Нелинейность фигурирует только в случае учета квадратичного закона сопротивления [2,3]. Физическая нелинейность, связанная переменностью скорости распространения малых возмущений давления в системе труба-среда c от плотности среды ρ, при одновременном учете квадратичного закона сопротивления, настолько усложняет задачу, что в литературе не найти решения задач при учете всех этих факторов.

При учете переменности площади поперечного сечения трубопровода система уравнений Н.Е. Жуковского записываются в виде [12]:

$$\begin{cases} -f\ p_x = \left(f\rho u\right)_t + \varepsilon f \rho u^2 + \\ \quad + f\rho g \sin\alpha + (1+\beta)\left(\rho u^2 f\right)_x, \\ -f\ p_t = c^2\left(f\rho u\right)_x,\ c^2 = p_\rho. \end{cases} \tag{1}$$

где использованы обозначения: t, x – время и продольная координата; p, u – средние значения статического давления и скорости потока среды в сечении x; ε – параметр сопротивления в формуле Дарси-Вейсбаха, зависящий от шероховатости живого сечения трубопровода и режима течения; $D = D(x)$ – переменный диаметр трубопровода; $f = \pi D^2/4$ – переменная площадь поперечного сечения трубопровода; β – поправка Кориолиса, связанная с переходом к квазиодномерному представлению параметров потока.

В первом уравнении первый справа от знака равенства представляет локальную составляющую силы инерции, второй член – силу трения, третий член – силу гравитации при постоянном уклоне трубы от горизонта, последний член – силу конвекции с коэффициентом Кориолиса, образованного переходом к осредненным по продольной координате показателям.

Используем видоизменения в виде

$$fp_x = \left(fp\right)_x - f_x p,\quad fp_t = \left(fp\right)_t - f_t p$$

и введем вспомогательную функцию

$$\varphi = \ln\frac{f\rho}{f_0\rho_0}, \tag{2}$$

где f_0, ρ_0 – значения площади поперечного сечения трубопровода и плотности среды до возмущений.

Подстановки этих изменений в систему (1) и некоторые видоизменения приводит к системе уравнений [13]

$$\begin{cases} c^2\varphi_x + c\varphi_t + u_t + cu_x + \varphi_t u + cu\varphi_x = L_1 = \\ = -\left[\varepsilon u^2 + g\sin\alpha + (1+\beta)\left(u^2\varphi\right)_x\right] - \\ -c\left[\left(\ln\varphi\right)_t + c\left(\ln\varphi\right)_x\right], \\ c^2\varphi_x - c\varphi_t + u_t - cu_x + \varphi_t u - cu\varphi_x = L_2 = \\ = -\left[\varepsilon u^2 + g\sin\alpha + (1+\beta)\left(u^2\varphi\right)_x\right] - \\ -c\left[\left(\ln\varphi\right)_t - c\left(\ln\varphi\right)_x\right]. \end{cases} \tag{3}$$

Переходим к координатам бегущих волн $\eta = \eta(x,t)$ и $\xi = \xi(x,t)$, которые определяются из (3) с помощью условий однозначности перехода. Переход к новым координатам осуществляется согласно операторам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} + c\dfrac{\partial}{\partial x} = 2\xi_t\dfrac{\partial}{\partial \xi}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} - c\dfrac{\partial}{\partial x} = 2\eta_t\dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

при условиях $\begin{cases} \eta_t + c\eta_x = 0, \\ \xi_t - c\xi_x = 0. \end{cases}$

Тогда из (3) получим

$$\begin{cases} \left[u_\xi + (c+u)\varphi_\xi\right]\cdot 2\xi_t = c\cdot 2\xi_t\left(\ln\dfrac{f}{f_0}\right)_\xi - \\ -\varepsilon u^2 - g\sin\alpha - (1-\beta)\left[\left(u^2\varphi\right)_\eta \eta_x + \left(u^2\varphi\right)_\xi \xi_x\right], \\ \left[u_\eta - (c-u)\varphi_\eta\right]\cdot 2\eta_t = c\cdot 2\eta_t\left(\ln\dfrac{f}{f_0}\right)_\eta - \\ -\varepsilon u^2 - g\sin\alpha - (1-\beta)\left[\left(u^2\varphi\right)_\eta \eta_x + \left(u^2\varphi\right)_\xi \xi_x\right]. \end{cases}$$

С помощью данной системы уравнений можно изучить нелинейные явления в процессе трубопроводной транспортировки реальных жидкостей. Ниже приводим результаты по этой системе, когда пренебрегают влиянием силами Кориолиса, гравитации, гидродинамического сопротивления, а также изменением площади поперечного сечения трубопровода. При приравнивании правых частей уравнений нулю система приобретает вид:

$$\begin{cases} u_\xi + (c+u)\varphi_\xi = 0, \\ u_\eta - (c-u)\varphi_\eta = 0; \end{cases} \tag{5}$$

а (2), т.к. $f = f_0 = const$, принимает вид

$$\varphi = \ln\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Система (5) описывает взаимодействие встречных импульсов при вышеуказанных допущениях.

1. В реальных задачах уместно условие $u << c$ и традиционно исследуется система

$$u_\xi + c\varphi_\xi = 0,\quad u_\eta - c\varphi_\eta = 0. \tag{6}$$

При $c = const$ уравнения (6) принимает линейный вид, и имеет решение

$$u + c\varphi = f_1(\eta),\quad u - c\varphi = f_2(\xi).$$

Соответственно, решением задачи, согласно использованным обозначениям, будут

$$u = \frac{1}{2}\left[f_1(\eta) + f_2(\xi)\right],\quad \rho = \rho_0\frac{f_1(\eta) + f_2(\xi)}{2c_0}.$$

Функции $f_1(\eta)$, $f_2(\xi)$ определяются согласно начальному состоянию жидкости и граничным условиям.

2. Представляет интерес исследование чисто нелинейные явления при распространении импульсов и их взаимодействия при постоянном значении скорости звука и при пренебрежении левых частей уравнений системы (3). Тогда интегрирование уравнений (6) по η и ξ приводит к соотношениям

$$\ln\left(c_0+u\right)+\ln\frac{\rho}{\rho_0}=f_1^*\left(\eta\right),$$
$$\ln\left(c_0-u\right)+\ln\frac{\rho}{\rho_0}=-f_2^*\left(\xi\right). \tag{7}$$

Здесь $f_1^*\left(\eta\right)$, $f_2^*\left(\xi\right)$ – произвольные функции. Решив эту систему из алгебраических уравнений относительно скорости и плотности среды, получим

$$u=c_0\frac{f_1^*\left(\eta\right)+f_2^*\left(\xi\right)}{f_1^*\left(\eta\right)-f_2^*\left(\xi\right)},$$
$$\rho=\rho_0\frac{f_1^*\left(\eta\right)-f_2^*\left(\xi\right)}{2c_0}, \tag{8}$$

где функции $f_1^*\left(\eta\right)$, $f_2^*\left(\xi\right)$ следует согласовать с начальными и граничными условиями задачи.

Решение (8) показывает, что изменение плотности среды обусловлено разностью функций прямой волны $f_1^*\left(\eta\right)$ и обратной волны $f_2^*\left(\xi\right)$. Это согласуется решением линейной системы уравнений, полученное при $c=0$, когда использовали оценку $u<<c$ в виде $u\varphi_\xi<<c\varphi_\xi$.

3. Переходим к случаю, когда $c=const$ и скорость потока близка к скорости звука. Уравнения (6), при последовательном интегрировании, приводят к зависимостям

$$\ln\left(1+\frac{u}{c}\right)+\varphi=f_1^{**}\left(\eta\right),$$
$$\ln\left(1-\frac{u}{c}\right)+\varphi=-f_2^{**}\left(\xi\right). \tag{9}$$

Здесь $f_1^{**}\left(\eta\right)$ и $f_2^{**}\left(\xi\right)$ – произвольные функции своих аргументов. Их ищем с условием, чтобы заодно удовлетворить и линейные уравнения.

Пусть $\rho=\tilde{\rho}+\rho_0$. Тогда для правых частей уравнений системы (9) имеем оценки

$$\ln\left(1+\frac{u}{c}\right)\approx\frac{u}{c_0}+O\left(\frac{u}{c_0}\right),\ \ln\left(1+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)\approx\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}+O\left(\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right),$$

которые и приводят к системе линеаризованных уравнений

$$\frac{u}{c_0}+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}=f_1\left(\eta\right),\quad -\frac{u}{c_0}+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}=f_2\left(\xi\right). \tag{10}$$

При требованиях $\frac{u}{c_0}\to 0$ и $\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\to 0$ уравнения (10) позволяют принять

$$f_1^{**}\left(\eta\right)=1+f_1\left(\eta\right),\quad f_2^{**}\left(\xi\right)=1+f_2\left(\xi\right). \tag{11}$$

Справедливость последних зависимостей можно доказать следующим образом.

Из (9) и определения $\ln\frac{\rho}{\rho_0}=\varphi$ имеем $\ln\left[\left(1+\frac{u}{c}\right)\left(1+\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]=1+f_1\left(\eta\right)$. Или

$$\ln\left(1+\frac{u}{c}+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}+\frac{u}{c}\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)=1+f_1\left(\eta\right).$$

Разложив левую часть равенства в ряд Тейлора, и ограничившись первыми членами разложения, получим

$$\frac{u}{c}+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}+\frac{u}{c}\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}+O\left(\frac{u}{c}+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)^2=f_1\left(\eta\right).$$

Складывая единицу к обеим частям равенства, получим первое равенство из (11).

Второе равенство из (11) доказывается аналогичным образом.

С учетом $\ln\frac{\rho}{\rho_0}=\varphi$ легче анализировать уравнения, представив их в виде

$$\ln\left[\left(1+\frac{u}{c}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right]=\ln\left[1+f_1\left(\eta\right)\right],$$
$$\ln\left[\left(1-\frac{u}{c}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right]=\ln\left[1-f_2\left(\xi\right)\right]. \tag{12}$$

Отбросив натуральный логарифм, записываем систему

$$\left(1+\frac{u}{c}\right)\frac{\rho}{\rho_0}=1+f_1\left(\eta\right),\quad \left(1-\frac{u}{c}\right)\frac{\rho}{\rho_0}=1+f_2\left(\xi\right).$$

Отсюда находим искомых безразмерных величин

$$\frac{u}{c}=\frac{f_1\left(\eta\right)-f_2\left(\xi\right)}{1+f_1\left(\eta\right)+f_2\left(\xi\right)},\quad \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{1}{2}\left[f_1\left(\eta\right)-f_2\left(\xi\right)\right].$$

Полученное решение показывает, что изменение плотности среды линейно зависит от разности функций прямой и обратной волн. Это совпадает с решением, которое получено для линейной задачи при $u<<c$. А гидродинамическая скорость уменьшается за счет суммирования встречных волн. Притом уменьшение подчиняется гиперболическому закону, если сумма $f_1\left(\eta\right)+f_2\left(\xi\right)$ положительная.

Гидродинамические скорости прямой и обратной волн взаимосвязаны, чем они отличаются от решения по линейной теории. Решение (11) показывает, что даже когда учитывается сила сопротивления, скорость сильно меняется, оставаясь дозвуковой. Легко проверить, что (8) переходит в линейное решение, если $u<<c$.

Представляет интерес тот факт, что при подаче сигналов, близких со скоростью звука скоростях и обратном направлении, происходит резкое повышение гидродинамической скорости.

Это обусловлено волной разряжения, что нельзя реализовать практически.

Заметим еще одно свойство процесса. Из (12) получим

$$\begin{cases}(c+u)\rho=\left[1+f_1(\eta)\right]c_0\rho_0=M^+(\eta),\\(c-u)\rho=\left[1-f_2(\xi)\right]c_0\rho_0=M^-(\xi).\end{cases}$$

Здесь $M^+(\eta)$ и $M^-(\xi)$ – расходы с учетом нелинейной поправки на процесс распространения импульса, т.е. количества импульса в прямом и обратном направлениях. Они сохраняют свои формы и в случае учета нелинейности процесса.

Обозначение $\ln\dfrac{\rho}{\rho_0}=\varphi$ можно преобразовать с учетом возмущения плотности $\tilde{\rho}$: $\rho=\tilde{\rho}+\rho_0$. Тогда для функции можно использовать приближенное значение:

$$\varphi=\ln\frac{\rho}{\rho_0}=\ln\frac{\tilde{\rho}+\rho_0}{\rho_0}=\ln\left(1+\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}\right)\approx\frac{\tilde{\rho}}{\rho_0},$$

где нелинейные члены высокой степени отбросили на основе оценки $\tilde{\rho}<<\rho_0$.

Это позволяет показать, что только в данном случае решение совпадает с решением бегущих волн Даламбера, т.е. аналогичное (8) решение

$$u=\frac{1}{2}\left[f_1(\eta)+f_2(\xi)\right],\quad \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}=\frac{1}{2c_0}\left[f_1(\eta)-f_2(\xi)\right].$$

4. Теперь рассмотрим (6), когда скорость звука зависит от плотности среды: $c=c(\rho)_0$. Тогда изменение плотности учитываем зависимостью $e^{\varphi}=\dfrac{\rho}{\rho_0}$ и введем функцию $F(\varphi)$, чтобы выполнялось условие $F_\varphi=c$. Тогда $F_\xi=F_\varphi\varphi_\xi=c\varphi_\xi$.

Это позволяет получить систему

$$u+F(\varphi)=f_1(\eta),\quad u-F(\varphi)=f_2(\xi).$$

Отсюда следует решение

$$u=\frac{1}{2}\left[f_1(\eta)+f_2(\xi)\right],$$

$$F(\varphi)=\frac{1}{2}\left[f_1(\eta)-f_2(\xi)\right].$$

Вторая формула показывает, что плотность является нелинейной функцией бегущих волн и по этой причине гидродинамическая скорость получилась в виде линейной функции. Если $\tilde{\rho}<<\rho_0$, то второе уравнение можно привести к уравнению (7), согласно которому получено решение (8).

Для учета нелинейности рассмотрим первое уравнение из (6) и введем поправку к скорости звука

$$u_\xi+c\varphi_\xi=\left[u+F(\varphi)\right]_\xi=-u\varphi_\xi.$$

Вместо u и φ_ξ подставим линейные выражения из (8)

$$u_\xi+c\varphi_\xi=-\frac{1}{4}(f_1+f_2)(f_1-f_2)_\xi=$$

$$=-\frac{1}{4}(f_1+f_2)(-f_2)_\xi=\frac{1}{4}f_1(f_2)_\xi+\frac{1}{8}\left(f_2^2\right)_\xi.$$

В силу этого система приобретает вид

$$\begin{cases}u+F(\varphi)=\dfrac{1}{4}f_1f_2+\dfrac{1}{8}f_2^2+f_1,\\u-F(\varphi)=\dfrac{1}{4}f_1f_2+\dfrac{1}{8}f_2^2+f_2.\end{cases}$$

Из этой системы следует решение

$$u=\frac{f_1+f_2}{2}+\frac{1}{4}f_1f_2+\frac{1}{8}\left(f_1^2+f_2^2\right)+$$
$$+O\left(\left(\frac{f_1}{c}\right)^2,\left(\frac{f_2}{c}\right)^2\right),$$
$$F(\varphi)=\frac{f_1-f_2}{2}+\frac{1}{8}\left(f_2^2-f_1^2\right)+$$
$$+O\left(\left(\frac{f_1}{c}\right)^2,\left(\frac{f_2}{c}\right)^2\right). \qquad (13)$$

Conclusion

Решение (13) представляет собой приближенное решение задачи при $c=c(\rho)$ с учетом нелинейности в течениях идеальной жидкости и газа в трубопроводах, где учитывается взаимодействие прямой и обратной волн.

Решение показывает, что появление гармоник приводит к возрастанию крутизны сигнала или/и появлению малых осцилляций, связанные с нелинейностью распространения импульсов [13].

References:

1. Charnyj, I.A. (1975). *Neustanovivsheesja dvizhenie real'noj zhidkosti v trubah*. Izd. 2-e, Moscow, Nedra, pp.1-296.
2. Mamadaliev, H.A., & Huzhaev, I.K. (2016). Rasprostranenie volny uplotnenija, vyzvannoj tormozheniem zhidkosti v naklonnom truboprovode. *International Scientific Journal Theoretical & Applied Science, Vol. 37, Issue 5,* 105-114.
3. Mamadaliev, X.A., & Khujaev, I.Q. (2016). Mathematical model of the pipeline connected to the ends of an area with dampers of pressure. *American Journal of Mathematical and Computational Sciences, 1(1),* 43-49.
4. Naugol'nyh, K.A., & Esipov, I.B. (2011). Rasprostranenie nelinejnoj zvukovoj volny v nekonsolidirovannoj granulirovannoj srede. *Akusticheskij zhurnal, 2011, 57, 2,* 822-828.
5. Uizem, D. (1988). *Nelinejnye volny*. Moscow, Mir.
6. Vinogradov, M.B., Rudenko, O.V., & Suhorukov, A.P. (1979). Teorija voln. Moscow, *Nauka,* pp. 183-186.
7. Lajtthil, D. (1977). *Volny v zhidkostjah*. Moscow, Mir, pp.1-498.
8. Rudenko, O.V., Hedberg, K.M., & Jenflo, B.O. (2007) Stojachie akusticheskie volny konechnoj amplitudy v kubichno nelinejnoj srede. *Akusticheskij zhurnal, 53, 4,* 522-532.
9. Kovalev, V.F., & Rudenko, O.V. (2012). Nelinejnye akusticheskie volny v kanalah peremennogo sechenija. *Akusticheskij zhurnal, 58, 3,* 296-303.
10. Rudenko, O.V., & Shwartsburg, A.B. (2010). Nonlinear and linear wave phenomena in narrow pipes. *Acoustical Physics, 56, 4,* 429-434.
11. Ostrovskij, L.A., & Rudenko, O.V. (2009). O problemah nelinejnoj akustiki, predstavljajushhihsja segodnja naibolee vazhnymi i interesnymi. *Akusticheskij zhurnal, 55, 6,* 698-705.
12. Seleznjov, V.E., Aljoshin, V.V., & Prjalov S.N. (2007). *Matematicheskoe modelirovanie truboprovodnyh setej i sistem kanalov. Metody, modeli i algoritmy.* Moscow, MAKS Press, pp.1-695.
13. Bozorov, O.S., & Mamatkulov, M.M. (2015). *Analiticheskie issledovanija nelinejnyh gidrodinamicheskih javlenij v sredah s medlenno menjajushhimisja parametrami.* – Tashkent, TITLP, pp.1-96.