Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИНЦ (Russia) = 0.156
ESJI (KZ) = 8.716
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

QR – Issue

QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 07 Volume: 75

Published: 18.07.2019 http://T-Science.org

Elbek Ismoilov
Samarkand State University
Assistant to department of theoretical
and applied mechanics, Uzbekistan

Firuza Kasimova
Samarkand State University
Senior Lecturer to department of theoretical
and applied mechanics, Uzbekistan

Bekzod Ortikov
Samarkand State University
Student of Mechanical and
Mathematical Faculty, Uzbekistan

Ablakul Abdirashidov
Samarkand State University
Corresponding member of International
Academy, Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, Docent to department of
theoretical and applied mechanics, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

PARTICULAR SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS FOR THE HEAT DISSIPATION EQUATION USING THE APPROXIMATION METHODS

Abstract: *In this paper, variational iteration method and Adomian decomposition method has been applied to obtain particular solution of boundary problems for the heat dissipation equation. It is shown that these methods are effective and more powerful mathematical tools for the solution of the partial differential equations.*

Key words: *particular solution, boundary problem, heat dissipation equation, variational iteration method, Adomian decomposition method.*

Language: *Russian*

Citation: Ismoilov, E., Kasimova, F., Ortikov, B., & Abdirashidov, A. (2019). Particular solution of boundary problems for the heat dissipation equation using the approximation methods. *ISJ Theoretical & Applied Science, 07 (75)*, 189-192.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-07-75-33 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.07.75.33

Classifiers: *Theoretical research in mathematics.*

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Аннотация: *В данной работе метод вариационных итераций и метод разложения Адомиана применены для нахождения частных решений краевых задач для уравнения теплопроводности. Показано, что эти методы являются эффективными и более мощными математическими инструментами для решения дифференциальных уравнений в частных производных.*

Ключевые слова: *частное решение, краевая задача, уравнение теплопроводности, метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана.*

Введение.

Линейные и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных широко используются для описания сложных явлений в различных областях науки, особенно в физике, механике, биологии, химии и т.д. Решение краевых задач с такими уравнениями являются одной их основных проблем математической физики и инженерных наук. За прошлые несколько десятилетий математики и физики сделали значительные успехи в этом направлении [8, 10, 12, 13]. Многие из этих уравнений не имеют точных аналитических решений. С другой стороны, решение этих нелинейных уравнений аналитически могут вести некоторые авторы, которые глубоко знают описание некоторых физических процессов и иногда принуждает их знать некоторые факты, которые просто не понятны посредством общих наблюдений. В результате эти уравнения должны быть решены, используя другие методы. В литературе существует много методов для решения эволюционных уравнений. Последние годы были разработаны различные методики решения таких уравнений, например, метод гомотопического анализа [1, 7], метод вариационных итераций (МВИ) [6, 7, 8], метод разложения Адомиана (МРА) [3, 8], метод гомотопического возмущения [5, 8], упрощенный метод укороченных разложений [2, 9, 10] и др., а также их различные модифицированные варианты [8, 10]. В данной работе метод вариационных итераций и метод разложения Адомиана применены для нахождения частных решений некоторых краевых задач для уравнения теплопроводности.

Постановка задачи.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных, то есть уравнения теплопроводности:

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ t > 0$$

и граничные условия (задача Дирихле):

$$u(0,t) = \varphi(t),\ \ u(l,t) = \psi(t)$$

или (задача Неймана):

$$u_x(0,t) = \mu(t),\ \ u_x(l,t) = \nu(t).$$

где $f(x,t),\ \varphi(t),\ \psi(t),\ \mu(t),\ \nu(t)$ – известные функции; $u(x,t)$ – искомая функция.

Алгоритм метода вариационных итераций.

По идее вариационно-итерационного метода [8] итерационное решение этого уравнения можно записать так:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) +$$

$$+\int_0^t \lambda(t,s)\left[Lu_n(x,s) + N\tilde{u}_n(x,s) - q(x,s)\right]ds,\ \ n \ge 0,$$

где λ – множитель Лагранжа; $\tilde{u}_n$ – вариационный член, т.е. $\delta\,\tilde{u}_n = 0$;

Начальное приближение имеет вид

$$u_0(x,t) = u(x,0) + u_t(x,0)\,t + \ldots .$$

Окончательно имеем:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Алгоритм метода разложения Адомиана.

Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных перепишем в виде

$$Lu(x,t) = q(x,t) - Nu(x,t),$$

где L – дифференциальный оператор; L^{-1} – интегральный оператор.

Применение обратного оператора к заданному уравнению дает соотношение вида:

$$u(x,t) = f(x,t) - L^{-1}\left[Nu(x,t)\right].$$

Основная идея МРА это составление функционального уравнения вида

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t).$$

Отсюда имеем рекуррентное соотношение вида [8]:

$$u_0(x,t) = f(x,t);\ \ \ u_{n+1} = -L^{-1}\left[Nu_n(x,t)\right],$$

$$n \ge 0.$$

Пример.

Найти решение следующей краевой задачи с уравнением теплопроводности в виде:

$$u_t = 2u_{xx},\ \ 0 < x < \pi,\ t > 0, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = 0,\ \ \ u(\pi,t) = e^{-0,5t}. \qquad (2)$$

Сначала введем следующие обозначения:

$$u(x,0) = f(x),\ \ \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

где $f(x)$ - пока неизвестная функция.

Метод разложения Адомиана.

$$\int_0^t u_\xi(x,\xi)d\xi = 2\int_0^t \Delta_x u(x,\xi)d\xi,$$

отсюда имеем

$$u(x,t) = f(x) + 2\int_0^t \Delta_x u(x,\xi)d\xi.$$

По идее МРА:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t).$$

Исходя из этого имеем

$$u_0+u_1+u_2+...=f(x)+$$

$$+2\int_0^t\Delta_x[u_0+u_1+u_2+...]d\xi$$

и

$$u_0=f(x);$$

$$u_1=2\int_0^t\Delta_x u_0 d\xi=2tf''(x);$$

$$u_2=2\int_0^t\Delta_x u_1 d\xi=\frac{(2t)^2}{2!}f^{IV}(x);...;$$

$$u_n=2\int_0^t\Delta_x u_{n-1}d\xi=\frac{(2t)^n}{n!}f^{(2n)}(x)$$

и т.д.

Окончательно получим решение задачи вида

$$u(x,t)=u_0+u_1+...=f(x)+2tf''(x)+$$

$$+\frac{(2t)^2}{2!}f^{IV}(x)+...+\frac{(2t)^n}{n!}f^{(2n)}(x)+...= \qquad (3)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x).$$

Метод вариационных итераций.

По идее МВИ имеем формулу приближенного решения задачи:

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+$$

$$+\int_0^t\lambda(\xi)\left[\frac{\partial u_n(x,\xi)}{\partial\xi}-2\Delta_x\tilde{u}_n(x,\xi)\right]d\xi.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\lambda'(\xi)\big|_{\xi=t}=0$, $1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(\xi)=-1$.

Применяя МВИ, получим следующие результаты:

$$u_0(x,t)=f(x);$$

$$u_1(x,t)=f(x)+2tf''(x);$$

$$u_2(x,t)=f(x)+2tf''(x)+\frac{(2t)^2}{2!}f^{IV}(x);...;$$

$$u_n(x,t)=f(x)+2tf''(x)+\frac{(2t)^2}{2!}f^{IV}(x)+$$

$$+...+\frac{(2t)^n}{n!}f^{(2n)}(x)$$

и т.д.

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=f(x)+2tf''(x)+$$

$$+\frac{(2t)^2}{2!}f^{IV}(x)++...+\frac{(2t)^n}{n!}f^{(2n)}(x)+...= \qquad (3^*)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x).$$

Теперь неизвестную функцию $f(x)$ найдем из условие (2). В результате имеем

$$u(0,t)=0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x)\bigg|_{x=0}$$

и

$$u(\pi,t)=e^{-0,5t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x)\bigg|_{x=\pi}. \qquad (4)$$

Из первого равенства (4) имеем

$$f(0)=0;\quad f''(x)\big|_{x=0}=0;\quad f^{IV}(x)\big|_{x=0}=0;...;$$

$$f^{(2n)}(x)\big|_{x=0}=0 \text{ и т.д.} \qquad (5)$$

Из второго равенства (4) имеем

$$e^{-0,5t}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2t)^m}{m!}\frac{1}{(-4)^m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x)\bigg|_{x=\pi}$$

Теперь имеем

$$f(\pi)=1;\ f''(x)\big|_{x=\pi}=\frac{-1}{4};\ f^{IV}(x)\big|_{x=\pi}=\frac{1}{4^2};...;$$

$$f^{(2n)}(x)\big|_{x=\pi}=\frac{1}{(-4)^n} \text{ и т.д.} \qquad (6)$$

В общем случае, найти функцию $f(x)$, удовлетворяющий условий (5) и (6), иногда невозможно. В частном случае, функцию $f(x)$ ищем в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k.$$

Коэффициентов этого ряда a_k находим из условий (5) и (6), а из условие (5) имеем

$$a_0=0;\ a_2=0;...;\ a_{2n}=0; \text{ и т.д.}$$

Отсюда

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}x^{2k+1},$$

а из условия (6) имеем

$$f(\pi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k+1}\pi^{2k+1}=1=\sin\frac{\pi}{2}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}.$$

Отсюда верно, что

$$a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)!},\quad k=0,1,....$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)!}x^{2k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=\sin\frac{x}{2}.$$

Соответственно к этому имеем решение $u(x,t)$ в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t)^k}{k!}f^{(2k)}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-0{,}5t)^k}{k!}\sin\frac{x}{2}=e^{-0{,}5t}\sin\frac{x}{2}.$$

Выводы.

Таким образом, изучены применения метода вариационных итераций и метода разложения Адомиана к приближенному решению краевых задач. Результаты сравнены с точным решением краевой задачи и результатом, полученным с помощью математического пакета Maple 17. Из сравнений ясно, что эти методы достаточно точны. Поэтому, эти методы являются мощными математическими инструментами и с их помощью может быть решен большой класс нелинейных краевых задач, используемые в инженерных науках.

References:

1. Abdirashidov, A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdurashidov, A. A. (2018). Exact solution of fractional diffusion equations using the variational iteration method and Adomian decomposition method. *International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №5*, pp.101-107.
2. Abdurashidov, A. A., Ortiqov, B. B., Qadirov, N. X., & Abdirashidov, A. (2018). Exact solution of some nonlinear evolutionary equations using the modified simple equation method. *Theoretical and Applied Science, 3(59)*.
3. Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. 1st Edn., Kluwer Academic, Boston.
4. Hayat, T., Ahmed, N., Sajid, M., & Asghar, S. (2007). On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel. *Comp. Math. Appl., 54*, pp.407-414.
5. He, J. H. (2003). Homotopy perturbation method: A new nonlinear analytical technique. *Applied Math. Comput., 135*, pp.73-79.
6. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications. *Comp. Math. Appl., 54*, pp.881-894.
7. Khatami, I., Tolou, N., Mahmoudi, J., & Rezvani, M. (2008). Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation. *J. Applied SCI. 8*, pp.848-853.
8. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. (p.761). Higher Education Press, Berlin Heidelberg.
9. Abdurashidov, A. A. (2018). Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshennim metodom ukorochennix razlojeniy. *Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas». Vipusk: 6*.
10. Kudryashov, N. A. (2010). *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki*. (p.368). Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. Dolgoprudniy: Intellekt.
11. Xayrer, E., Nyorsett, S., & Vanner, G. (1990). *Resheniye obiknovennix differensialnix uravneniy. Nejestkiye zadachi.* (p.512). Moskva: Mir.
12. Salohiddinov, M. (2002). *Matematik fizika tenglamalari*. (p.448). Toshkent: O'zbekiston.
13. Bisadze, A. V., & Kalinichenko, D. F. (1985). *Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki*. (p.310). Ucheb. posobiye dlya mexaniko-matemat. i fiz. spes. vuzov. 2-ye izd., dop. Moskva: Nauka.