Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИНЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

QR – Issue

QR – Article

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2020 **Issue:** 04 **Volume:** 84

Published: 30.04.2020 http://T-Science.org

Yu.R. Krakhmaleva
Taraz State University
candidate of technical Sciences

K. Saken
Taraz State University
2nd year master's degree in Mathematics

SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS USING THE OPERATIONAL METHOD IN THE MAPLE ENVIRONMENT

Abstract: *As you know, when solving partial differential equations, the operating method is used under certain boundary conditions. Despite some limitations of this method, its undeniable advantage remains the reduction of a partial differential equation with a function of two variables to an ordinary differential equation, which greatly simplifies the solution of the original equation.*

Key words: *function, equation, method.*

Language: *Russian*

Citation: : Krakhmaleva, Y. R., & Saken, K. (2020). Solving partial differential equations using the operational method in the maple environment. *ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (84),* 782-784.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-84-137 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.04.84.137

Scopus ASCC: *2604.*

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ В СРЕДЕ MAPLE

Аннотация: *Как известно, при решении дифференциальных уравнений в частных производных операционный метод применяется при определенных краевых условиях. Несмотря на некоторую ограниченность данного метода, неоспоримым его достоинством остается приведение уравнения в частных производных с функцией двух переменных к обыкновенному дифференциальному уравнению, что значительно упрощает решение исходного уравнения.*

Ключевые слова: *функция, уравнение, метод.*

Введение

С развитием интерактивных вычислительных систем появилась возможность решать аналитически математические задачи, не прибегая к программированию. Одной из таких систем является пакет Maple, предназначенный для выполнения сложных вычислительных проектов. Рассмотрим решение дифференциальных уравнений в частных производных операционным методом средствами этого пакета, на примере уравнения теплопроводности:

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} &u(x,0)=0,\\ &u(0,t)=u_2,\\ &0\le x<\infty,\\ &t>0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Для реализации операционного метода используем пакет интегральных преобразований *int trans*. Вводим числовые значения коэффициентов уравнения (1), уравнение, начальные и граничные данные y_1, y_2 :

```
restart;
with(inttrans);
a2:=k^2;a1:=-1;a0:=0;y1:=0;y2:=u0;
eq1:=a2*diff(u(x,t),x,x)+a1*diff(u(x,t),t)=0;
ny:=u(x,0)=y1;
gy:=u(0,t)=y2;
```

$$a2 := k^2$$
$$a1 := -1$$
$$a0 := 0$$
$$y1 := 0$$
$$y2 := u0$$

$$eq1 := k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{u}(x,t)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{u}(x,t)\right) = 0$$
$$ny := \mathrm{u}(x,0) = 0$$
$$gy := \mathrm{u}(0,t) = u0$$

Для исходного уравнения выполняем преобразования Лапласа по переменной t. Это возможно, используя функцию прямого преобразования $laplace\,(eq,t,p)$, где eq - преобразуемое уравнение, t --переменная, относительно которой записывается исходное уравнение, p– переменная, относительно которой будет записан результат преобразования:

```
l:=laplace(eq1,t,p);
```

$$l := k^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,p)\right) - p\,\mathrm{laplace}(\mathrm{u}(x,t),t,p) + \mathrm{u}(x,0) = 0$$

В уравнении l выполняем замену функции $laplace\,(eq,t,p)$ на $U(x)$ - изображение искомой функции $u(x,t)$ (в нашем случае, $U(x)$ совпадает с $U(x,p)$, см. далее) и вводим значения начального условия. В результате, имеем операторное уравнение для $U(x)$, которое является линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

```
eq2:=subs(laplace(u(x,t),t,p)=U(x),l);
eq3:=subs(lhs(ny)=rhs(ny),eq2);
```

$$eq2 := k^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right) - p\,\mathrm{U}(x) + \mathrm{u}(x,0) = 0$$
$$eq3 := k^2\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{U}(x)\right) - p\,\mathrm{U}(x) = 0$$

Не составляет труда найти решение полученного уравнения:

```
u1:=dsolve(eq3);
```

$$u1 := \mathrm{U}(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)} + \_C2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$

Учитывая ограниченность функции $u(x,t)$, $U(x,p)$ при $x\to\infty$,в $U(x)$ произвольная постоянная $C_1 = 0$. Воспользоваться заменой переменной для C_1 к желаемому результату не приводит. Поэтому прибегаем к выделению частей уравнения:

```
u2:=rhs(u1);
u3:=op(u2);
U1:=u3[1];U2:=u3[2];
```

$$u2 := \_C1\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)} + \_C2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$
$$u3 := \_C1\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}, \_C2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$

$$U1 := \_C1\,\mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$
$$U2 := \_C2\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$

Далее находим значение C_2, используя граничное условие:

```
u4:=laplace(gy,t,p);
u5:=simplify(subs(x=0,U2));
u6:=subs(laplace(u(0,t),t,p)=u5,u4);
```

$$u4 := \mathrm{laplace}(\mathrm{u}(0,t),t,p) = \frac{u0}{p}$$
$$u5 := \_C2$$
$$u6 := \_C2 = \frac{u0}{p}$$

Зная, значение произвольной постоянной C_2 нужно подставить в $U2$. Но опять приходится выделять составляющие $U2$, чтобы получить выражение для функции $U(x,p)$:

```
u7:=rhs(u6);
u8:=op(U2);
u9:=u8[1];
u10:=u8[2];
U:=u7*u10;
```

$$u7 := \frac{u0}{p}$$
$$u8 := \_C2, \mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$
$$u9 := \_C2$$
$$u10 := \mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}$$
$$U := \frac{u0\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\sqrt{p}\,x}{k}\right)}}{p}$$

Для восстановления оригинала функции $U(x,p)$ воспользуемся функцией $invlaplace\,(eq,p,t)$, где eq - уравнение относительно переменной p, t - переменная, относительно которой записывается результирующая зависимость, С помощью данной функции осуществляется обратное преобразование Лапласа от$U(x,p)$ к $u(x,t)$-решению исходного дифференциального уравнения в частных производных.

Как видим, решение дифференциального уравнения в частных производных операционным методом в среде Maple имеет некоторые трудности, которые не дают возможности построения автоматизированной программы решения. Но тем не менее, данная методика, может успешно применяться для аналитического нахождения решения определенных дифференциальных уравнений с частными производными.

References:

1. Jel`sgol`c, L. Je. (2014). *Variacionnoe ischislenie*. (p.208). Moscow: LKI.
2. Fajnshmidt, V. (2007). *Differencial`noe i integral`noe ischislenie funkcij odnogo argumenta*. (p.224). Moscow: BHV-Peterburg.
3. Mors, M. (2010). *Variacionnoe ischislenie v celom*. (p.512). Moscow: NIC "Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika".
4. Bunin, M., Sidorov, Jy.V., & Fedoruk, M.I. (1989). *Sha Lekcii po teorii funkcij kompleksnogo peremennogo*. Moscow: Nauka.
5. Landau, L.D. (1988). *Teoreticheskaja fizika*: uchebnoe posobie v 10 tomah, tom IV.Gidrodinamika. (p.736). Moscow: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit.
6. Tihonov, A.A. (2004). *Uravnenija matematicheskoj fiziki*. Izd.7-e, (p.798). Moscow: Izd-vo MGU.
7. Vasil`eva, A.B. (2003). *Differencial`nye i integral`nye uravnenija, variacionnoe ischislenie v primerah i zadachah*. (p.432). Moscow: FIZMATLIT.
8. Krasnov, M.I., Kiselev, A.I., & Makarenko, T.I. (1981). *Funkcii kompleksnogo peremennogo. Operacionnoe ischislenie. Teorija ustojchivosti*. (p.304). Moscow: Nauka.
9. Goloskokov, D.P. (2004). *Uravnenija matematicheskoj fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple uchebnik dlja vuzov*. (p.539). SPb.: Piter.
10. D`jakonov, V.P. (2006). Maple *9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii*. Izd: Piter.