

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2020 Issue: 06 Volume: 86

Published: 30.06.2020 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Mashrabjon Shaxabuddinovich Mamatov

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
Doctor of physico-mathematical sciences,
professor of the department "Geometry and Topology"
mamatovmsh@mail.ru

Nodirbek Madirimovich Karimov

Military Technical Institute
of the National Guard of the Republic of Uzbekistan
Independent Researcher,
matematik-uz@mail.ru


THE TASK OF DISTRIBUTION OF ACCESSORY RESOURCES OF FORCES IN CONFLICT SITUATIONS

Abstract: The article considers the appearance of two conflicting parties as a differential game. In this article, the task of distributing additional forces resources is introduced in game quality. The problem of distributing additional resources of forces in optimal time is solved using the maximum principle. The forces resources provide the optimal strategy taken based on the equation of the quadratic Lanchester law and are determined using a numerical analysis of the optimal controls.

Key words: conflict situation, Lanchester's quadratic law, differential game, forces resources, optimal strategy, controlled reinforcements, objective function, maximum principle.

Language: Russian

Citation: Mamatov, M. S., & Karimov, N. M. (2020). The task of distribution of accessory resources of forces in conflict situations. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 06 (86), 639-645.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-06-86-117> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2020.06.86.117>
Scopus ASCC: 2600.

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ СИЛ В КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЯХ

Аннотация: В статье рассматривается поведение двух противоборствующих между собой конфликтующих сторон в качестве дифференциальной игры. В данной работе задача распределения дополнительных ресурсов сил введена в игровом качестве. Задача распределения дополнительных ресурсов сил в оптимальном времени решена с применением принципа максимума. Ресурсы сил обеспечивают полученную оптимальную стратегию на основе уравнения квадратичного закона Ланчестера и определены с помощью числового анализа оптимальных управлений.

Ключевые слова: конфликтная ситуация, квадратичный закон Ланчестера, дифференциальная игра, ресурсы сил, оптимальная стратегия, управляемая подкрепления, целевая функция, принцип максимума.

Введение

UDC 517.977.1

В работе рассматривается задача оптимизация распределения подкрепления ресурсов сил, протекающих в конфликтной ситуации, когда распределение подкрепляющий

ресурсом управление процессом осуществляется двумя противодействующими сторонами.

Изучена оптимальность стратегий каждой из сторон для функционального процесса по параметрам управления противодействующих сторон.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
ISI (Dubai, UAE) = 0.829
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 8.997
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Одной из самых актуальных задач в настоящее время является разработка методов повышения эффективности управления различными процессами, создание систем управления, наилучшим образом выполняющих возложенные на них функции.

Необходимость рассмотрения таких задач возникает во многих областях практической деятельности: в радиотехнике, электротехнике, энергетике, робототехнике и в военном деле.

Регулируемые процессы, разнообразные по физической природе, по своему характеру могут быть разбиты детерминированные процессы, стохастические процессы и вероятностные процессы. Такой характер имеет большинство процессов из области военного дела. При планировании различных боевых операций, необходимо учитывать возможные действия противника, которые заранее неизвестны. Математическая тактика исследования военных действий и применения дифференциальных игровых модели исследована [1].

Исследование боевых действий и изучения конфликтных ситуаций, решения таких задач с применением системы дифференциальных уравнений занимались ученые Ф.У.Ланчестер, М.П.Осипов, Е.С.Вентцель, Ф.Морз и Дж.Кимбелл, В.М.Гаврилов и др.

Теория боя Ланчестера - это типичный научный метод прогнозирования итогов военных конфликтов по количественному анализу. Это теория получила широкое распространение для анализа реальных боевых действий, и определяет тактику в военной игре моделирования [4, 5, 6]. Оптимальное распределение ресурсов и модели перераспределения в военных конфликтах на основе квадратичного закона Ланчестера предложено в [7, 8]. В работе Chen, Jing, Li [2] проблема распределения подкрепление ресурсов сил в конфликтных ситуациях изучалась на основе метода Лагранжа.

Решение задач оптимизации распределения вспомогательные ресурсов сил в конфликтной ситуации имеет ряд специфических особенностей. Рассмотрено особенностей решения задач оптимизации распределение ресурсы в конфликтных ситуациях.

Задачи оптимального распределения дополнительных ресурсов сил в течение определенного периода времени играет важную роль в быстром принятии правильного решения в конфликтной ситуации.

1. Постановка задачи. Рассмотрим, следующее уравнения квадратичного закона Ланчестера с дополнительным ресурсом сил

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ay(t) + u(t), & x(t_0) = x_0 \\ \dot{y}(t) = -bx(t) + v(t), & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ - сильные стороны двух противоположных сил, t - время продолжительности боя, $a > 0$ и $b > 0$ являются постоянным коэффициенты огневой мощи, отражающие эффективность сил в единицу времени; $x(t_0) = x_0$ и $y(t_0) = y_0$ - рассматривается как начальная сила двух военных сил; $u(t) > 0$ и $v(t) > 0$ - управляющие переменными входа.

В настоящее время многие исследователи считают фактор подкрепления и само разрушающие фактор как управляющие входы. $u(t)$ и $v(t)$ являются управляющие подкреплениями в некоторых проблемах принятия решений командования войной, которые могут изменить конфликтную ситуацию и сил двух противостоящих сторон.

Теперь рассмотрим военный конфликт между двумя противостоящими силами. Пусть Y обозначает защищающуюся сторону, а X обозначает атакующие стороны, u и v рассмотрим как стратегию усиления подкрепления с обеих сторон. Решения задачи определения оптимальных стратегий усиления подкреплений u^* и v^* с оптимизацией, удовлетворяют целевую функцию $J(u, v)$, которая состоит из сил выжившей двух противоборствующих сторон в фиксированное время T .

$$J(u, v) = x(T) - y(T) \quad (2) \text{ где}$$

$x(T)$ и $y(T)$ - остаточные силы на обе стороны в фиксированное время T .

Таким образом, целью данной работы является решение оптимального управления стратегии для системы (1) и целевой функции $J(u, v)$. Чтобы продолжать процесс решения для вышеуказанной задачи, необходимо следующее предположение.

Предположение 1. Согласно целевой функции (2), предположим, что $u > 0$ и $v > 0$ удовлетворяют

$$U = \left\{ (u(t), v(t)) \left| \begin{array}{l} u_1 \leq u(t) \leq u_2, \\ v_1 \leq v(t) \leq v_2 \end{array} \right. \right\} \quad (3)$$

где u_1 - минимальные количество поступления подкреплений, атакующая сторона; u_2 - максимальные количество поступления подкреплений; v_1 - минимальные количество поступления подкреплений, защищающейся

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

сторона; v_2 - максимальные количество поступления подкреплений.

Предположение 2. Обозначим, что M_0 и N_0 общее количество силы конфликтных сторон, дополняющие подкреплений, и удовлетворяющие следующие условия:

$$\int_0^T u(t)dt \leq M_0; \quad \int_0^T v(t)dt \leq N_0, \quad (4)$$

$$\int_0^T u_2(t)dt \geq M_0; \quad \int_0^T v_2(t)dt \geq N_0, \quad (5)$$

Замечание 1. Неравенства (4) и (5) означают границы дополнительных сил подкрепления, которые могут быть введены в обе стороны.

Тогда игровая проблема может быть описана следующим образом: Атакующей сторона $x(t)$

выбирает оптимальную стратегию u^* и получить максимальное значение $J(u, v)$. Защищающейся сторона $y(t)$ получить оптимальную стратегию v^* , чтобы сохранить минимальное значение $J(u, v)$, то есть

$$J(u^*, v^*) = \max_u \min_v J(u, v). \quad (6)$$

2. Полученные результаты и их доказательство. Целью данного исследования является получение оптимальных стратегий дифференциальной игры, то есть необходимо найти оптимальное значение $J(u, v)$.

Таким образом, дадим в этом разделе дополнительные стратегии оптимального управления и решающий подход на конфликтных сторонах.

Во-первых, мы можем получить решения (1) следующим образом

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left(x_0 - \sqrt{\frac{b}{a}} y_0 \right) e^{\sqrt{ab}t} + \frac{1}{2} \left(x_0 + \sqrt{\frac{b}{a}} y_0 \right) e^{-\sqrt{ab}t} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(u - \sqrt{\frac{a}{b}} v \right) e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} + \left(u + \sqrt{\frac{a}{b}} v \right) e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)} \right] dt \\ y(t) &= \frac{1}{2} \left(y_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} x_0 \right) e^{\sqrt{ab}t} + \frac{1}{2} \left(y_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} x_0 \right) e^{-\sqrt{ab}t} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \left[\left(v - \sqrt{\frac{b}{a}} u \right) e^{\sqrt{ab}(t-\tau)} + \left(v + \sqrt{\frac{b}{a}} u \right) e^{-\sqrt{ab}(t-\tau)} \right] dt \end{aligned}$$

Используя решение (1), целевая функция $J(u, v)$ может быть представлено как

$$J(u, v) = I_1 + \int_0^T (I_2 u - I_3 v) dt \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \left(x_0 - y_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} x_0 - \sqrt{\frac{b}{a}} y_0 \right) e^{\sqrt{ab}T} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x_0 - y_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} x_0 + \sqrt{\frac{b}{a}} y_0 \right) e^{-\sqrt{ab}T} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{ab}(T-t)} + \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{ab}(T-t)} \right] \\ I_3 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{\sqrt{ab}(T-t)} + \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{-\sqrt{ab}(T-t)} \right] \end{aligned}$$

С постоянными числами x_0 , y_0 и T можно решить оптимальное значение целевой функции (7), путем исследования оптимального значения целевой функции, которого выглядит следующим образом,

$$f(u, v) = \int_0^T (I_2 u - I_3 v) dt \quad (8)$$

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть функции $u^*(t)$, $v^*(t)$ является оптимальным управлением, а функция $x^*(t)$, $y^*(t)$ – соответствующей оптимальной траекторией в сформулированной задаче (1).

Тогда необходимо существуют отрицательное число ψ_0^* и векторная функция $\psi^*(t) = (\psi_1^*(t), \psi_2^*(t))$ с непрерывными на

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

отрезке $[0, T]$ компонентами такие, что выполняются следующие три условия:

1) вектор-функция $\hat{\psi}^*(t) = (\hat{\psi}_0^*, \hat{\psi}_1^*(t), \hat{\psi}_2^*(t))$ является ненулевой на отрезке $0 \leq t \leq T$;

2) вектор-функция $\hat{\psi}^*(t) = (\hat{\psi}_1^*(t), \hat{\psi}_2^*(t))$ является решением сопряженной системы

функция $H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*, \psi_2^*, u, v)$ двух переменных u, v достигает максимума на множестве $U, U \subset R^2$, при $u = u^*(t), v = v^*(t)$ т.е.

$$f(u, v^*) - \psi_1 \int_0^T u dt + \psi_2 \int_0^T v^* dt \leq f(u^*, v^*) - \psi_1 \int_0^T u^* dt + \psi_2 \int_0^T v^* dt \leq f(u^*, v) - \psi_1 \int_0^T u^* dt + \psi_2 \int_0^T v dt$$

тогда целевая функция (8) удовлетворяет

$$f(u^*, v^*) = \max_u \min_v \left\{ f(u, v) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T u dt \leq \int_0^T u^* dt; \\ \int_0^T v dt \leq \int_0^T v^* dt \end{array} \right. \right\}.$$

Теорема 2. Если существуют постоянные числа ψ_1, ψ_2 , при удовлетворении условий

$$\int_0^T u dt \leq \int_0^T u^* dt; \int_0^T v dt \leq \int_0^T v^* dt \quad \text{и} \quad \text{при}$$

дополнительных управляемых сил $u^*(t) \in [u_1, u_2], v^*(t) \in [v_1, v_2]$ которые дополняют силы сторон

$$f(u^*, v^*) = \max_u \min_v f(u, v)$$

то целевая функция так же будет в следующем виде

$$J(u^*, v^*) = \max_u \min_v J(u, v)$$

Таким образом, управления u^* и v^* являются оптимальными стратегиями конфликтных сторон.

Доказательство. Сначала построим функцию Гамильтона на основе принципа максимума:

$$H(t, x, y, \psi, u, v) = \sum_{i=0}^2 \psi_i f_i(t, x, y, u, v). \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\psi_0^* \frac{\partial f_0}{\partial x} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_0^* \frac{\partial f_0}{\partial y} - \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} - \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq T;$$

3) при каждом $t \in [0, T]$, в котором обе функции $u = u^*(t), v = v^*(t)$ непрерывны,

$$\begin{aligned} H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u^*(t), v^*(t)) = \\ = \max_{(u, v) \in U} H(t, x^*(t), y^*(t), \psi_0^*, \psi_1^*(t), \psi_2^*(t), u^*, v^*), \\ 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Лемма. Если существуют постоянные числа ψ_1, ψ_2 и управляющие подкреплениями $u^*(t) \in [u_1, u_2], v^*(t) \in [v_1, v_2]$ такие, что

Подставив

$$f_0 = I_2 u - I_3 v, f_1 = -a u + u, f_2 = -b x + v \quad \text{в} \quad (9), \text{ используем условия максимума Гамильтона.}$$

$$H = -a u \psi_1 - b x \psi_2 + (\psi_0 I_2 + \psi_1) u + (-\psi_0 I_3 + \psi_2) v. \quad (10)$$

$$H \rightarrow \max_{(u, v) \in U}.$$

Из этого условия при каждом фиксированном наборе параметров $t, x, y, \psi_0, \psi_1, \psi_2$ находят управление u, v (в общем случае зависящее от всех указанных параметров), доставляющее максимальное значение функции Гамильтона H . Обозначим это управление через

$$u = u(t, x, y, \hat{\psi}), v = v(t, x, y, \hat{\psi}) \quad (11)$$

В общем случае найти управление в виде (11) не просто, однако для некоторых классов задач управления такую функцию управления удастся записать в явном виде.

Функция Гамильтона достигает своего максимального значения (благодаря линейности по переменным u, v и специальному виду области управления) только в граничных точках множества U , а именно при

$$u = \begin{cases} u_2, & \text{если } \psi_0 I_2 + \psi_1 > 0, \\ u_1, & \text{если } \psi_0 I_2 + \psi_1 < 0. \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} v_2, & \text{если } -\psi_0 I_3 + \psi_2 > 0, \\ v_1, & \text{если } -\psi_0 I_3 + \psi_2 < 0. \end{cases}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Для удобства проверки выражения $\psi_0 I_2 + \psi_1$ на больше или меньше нуля примем $\psi_0 = -1$, и оптимальные стратегии подкрепления $u^*(t)$ и $v^*(t)$ с обеих сторон могут быть решены следующим образом,

$$u^* = \begin{cases} u_2, & \text{если } -I_2 + \psi_1 > 0, \\ u_1, & \text{если } -I_2 + \psi_1 < 0 \end{cases}$$

$$v^* = \begin{cases} v_2, & \text{если } I_3 + \psi_2 > 0, \\ v_1, & \text{если } I_3 + \psi_2 < 0 \end{cases}$$

$$-I_2 + \psi_1 = -\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{ab}T} e^{-\sqrt{ab}t} - \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{ab}T} e^{\sqrt{ab}t} + C_1 e^{\sqrt{ab}t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}t} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{ab}T} + C_2 \right] e^{-\sqrt{ab}t} + \left[-\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{ab}T} + C_1 \right] e^{\sqrt{ab}t}. \quad (12)$$

$$I_3 + \psi_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{\sqrt{ab}T} e^{-\sqrt{ab}t} + \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{-\sqrt{ab}T} e^{\sqrt{ab}t} + C_3 e^{\sqrt{ab}t} - C_4 e^{-\sqrt{ab}t} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{\sqrt{ab}T} - C_4 \right] e^{-\sqrt{ab}t} + \left[\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{-\sqrt{ab}T} + C_3 \right] e^{\sqrt{ab}t}. \quad (13)$$

Случай 1. Для того чтобы (12) выражение было больше нуля, должны выполняться условия $C_1 > \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{ab}T}$ и $C_2 > \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{ab}T}$. В таком случае в временном интервале $t \in [0, t^*]$ (12) выражение будет больше нуля и сторона $x(t)$ в данном интервале использует управление U_2 .

Случай 2. Для того чтобы (12) выражение было меньше нуля, должны выполняться условия $C_1 < \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{-\sqrt{ab}T}$ и $C_2 < \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) e^{\sqrt{ab}T}$. В таком случае в временном интервале $t \in [t^*, T]$ (12) выражение будет меньше нуля и сторона $x(t)$ в данном интервале использует управление U_1 .

Случай 3. Для того чтобы (13) выражение было больше нуля, должны выполняться условия

Из второго условия 1 теоремы найдем ψ_1, ψ_2

$$\begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = -\frac{dH}{dx} = b\psi_2 \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\frac{dH}{dy} = a\psi_1 \end{cases}$$

Из этого следует

$$\psi_1(t) = C_1 e^{\sqrt{ab}t} + C_2 e^{-\sqrt{ab}t}$$

$$\psi_2(t) = C_3 e^{\sqrt{ab}t} - C_4 e^{-\sqrt{ab}t}$$

$C_3 > -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{-\sqrt{ab}T}$ и $C_4 < \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{\sqrt{ab}T}$. В таком случае в временном интервале $t \in [0, t^{**}]$ (13) выражение будет больше нуля и сторона $y(t)$ в данном интервале использует управление U_2 .

Случай 4. Для того чтобы (13) выражение было меньше нуля, должны выполняться условия $C_3 < -\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{-\sqrt{ab}T}$ и $C_4 > \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{a}{b}} \right) e^{\sqrt{ab}T}$. В таком случае в временном интервале $t \in [t^{**}, T]$ (13) выражение будет меньше нуля и сторона $y(t)$ в данном интервале использует управление U_1 .

Исходя из выше указанных случаев, ограничимся этими частями решения задачи выбора оптимального управления.

Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 8.997
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

Предположим, что во время t^* и t^{**} , равенства $I_2(t^*) = \psi_1(t^*)$ и $I_3(t^{**}) = -\psi_2(t^{**})$.

В таком случае

$$t^* = T - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left(\frac{\pm\psi_1 + \sqrt{\psi_1^2 - 1 + \frac{\beta}{\alpha}}}{1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}} \right). \quad (14)$$

$$t^{**} = T - \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \left(\frac{\mp\psi_2 + \sqrt{\psi_2^2 - 1 + \frac{\alpha}{\beta}}}{1 + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \right). \quad (15)$$

Тогда оптимальные стратегии можно записать следующим образом

$$u^*(t) = \begin{cases} u_2, & t \in [0, t^*] \\ u_1, & t \in (t^*, T] \end{cases}$$

$$v^*(t) = \begin{cases} v_2, & t \in [0, t^{**}] \\ v_1, & t \in (t^{**}, T] \end{cases}$$

и целевая функция удовлетворяет

$$J(u^*, v^*) = \max_u \min_v J(u, v)$$

То есть $u^*(t)$ и $v^*(t)$ являются оптимальными стратегиями.

Замечание 2. Поскольку параметры ψ_1 и ψ_2 неизвестны, отметим, что t^* и t^{**} не может быть непосредственно рассчитан и оптимальный стратегии $u^*(t)$ и $v^*(t)$ не могут быть непосредственно определены.

3. Численный пример. Рассмотрим дифференциальную игру (1) - (6) и предположим, что

$$x_0 = 1000, y_0 = 1000, T = 3, \alpha = 0.4, \beta = 0.9,$$

$$u_1 = 25, u_2 = 50, v_1 = 20, v_2 = 40, M_0 = 100, N_0 = 100.$$

Тогда условия (2), (4), (5) и (6) выполнены, и мы будем находить оптимальное значение $x(T) - y(T)$, чтобы получить оптимальные стратегии u^* и v^* .

Согласно теореме 1 оптимальные стратегии u^* и v^* могут быть решены следующим образом,

$$u^*(t) = \begin{cases} 50, & t \in [0, 0.9684] \\ 25, & t \in (0.9684, 3] \end{cases}$$

$$v^*(t) = \begin{cases} 40, & t \in [0, 1.9651] \\ 20, & t \in (1.9651, 3] \end{cases}$$

где $t^* = 0.9684$ и $t^{**} = 1.9651$. Мы можем получить решения в следующем виде

$$\psi_1 = 4.16, \psi_2 = 1.64,$$

$$\int_0^T u^* dt = 99.7432, \int_0^T v^* dt = 99.3031.$$

Тогда целевую функцию $J(u, v)$ можно записать следующим образом,

$$\max_u \min_v J(u, v) = x(T) - y(T) = 482.7$$

На рис.1 дано изменение силы с обеих сторон с оптимальными подкреплениями дополняющие друг друга u^* и v^* .

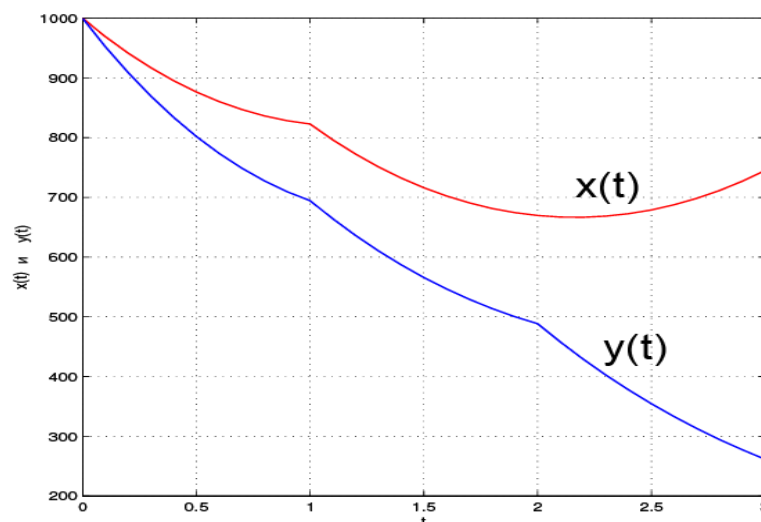


Рис. 1. Изменение силы с обеих сторон при оптимальной стратегии поддержки боя u^* и v^*

Impact Factor:	ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.997	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

Таблица 1. Решения дифференциальной игры, при $T = 3, 4, 5, 10$, u^* и v^*

T	t^*	t^{**}	$\int_0^T u^*(t)dt$	$\int_0^T v^*(t)dt$	M_0	N_0
3	0.9684	1.9465	99.2106	98.9295	100	100
4	3.0827	3.4097	178.7378	149.7563	180	150
5	2.9646	2.4653	199.4314	149.2851	200	150
10	7.9662	7.4365	449.2687	349.6506	450	350

Для получения решения дифференциальной игры подставили управляющие параметры u и v , что показано в табл.1. В приведенном случае сторона X является победителем.

Заключение.

Следует подчеркнуть, что для данной задачи при конфликтных ситуациях, стратегии сторон распределения дополнительных сил удовлетворяют соответствующие условия.

Из вышеуказанной задачи следует, что существуют разные стратегии в разных интервалах и выполнимость может быть подтвержденным. Чтобы проиллюстрировать осуществимость эффективности метода решения предложенную в статье. Получены оптимальные условия дифференциальной игровой модели поддержки боя. Оптимальные стратегии поддержки боя получены на численном примере.

References:

- Gavrilov, V.M. (1969). *Optimal processes in conflict situations*. (p.160). Moscow: Publishing "Soviet Radio".
- Chen, X. Y., et al. (2011). *Differential game model and its solutions for force resource complementary via Lanchester square law equation*. In Proceedings of the 18th IFAC World Congress. (pp.1024–1030). Milano, Italy.
- Ekchian, L.K. (1982). *An overview of the Lanchester type fighting models for modern warfare*. AD-A-115389.
- Taylor, J.G. (1983). Lanchester Models of War. Vol. 1 and 2. *American Society for the Study of Operations, Military Applications Section, Arlington, Virginia*.
- Helmbold, R.L. (1975). Modification of the Lanchester equation. *Operations Research*. - No 13(2). pp. 857-859.
- Li D. F., & Chen, Q. H.. (2004). Troops support differential game optimization model and solution. *Fire control and command control*, V. 29, № 1, pp. 41-43.
- Sheeba, P.S., & Ghose, D. (2005). *Optimal resource partitioning in a military conflict based on Lanchester attrition models*. Proc IEEE Conf on Decision and Control, and Eur Control Conf. (pp. 5859–5864). Seville, Spain: December.
- Sheeba, P.S., & Ghose, D. (2008). Optimal resource allocation and redistribution strategy in military conflicts with Lanchester square law attrition. *Naval Research Logistics*, V. 55, № 6, pp. 581-591.
- Chen, X. Y., & Zhang, A. C. (2014). Modeling and optimal control of a class of warfare hybrid dynamic systems based on Lanchester ($n, 1$) attrition model. *Mathematical Problems in Engineering*, vol. Article ID 481347, p. 7.
- Lin, Q., Loxton, R., Teo, K.L., & Wu, Y.H. (2011). A new computational method for a class of free terminal time optimal control problems. *Pacific Journal of Optimization*, V. 7, № 1, pp. 63–81.
- Chernousko, F.L., & Melikyan, A.A. (1978). *Game tasks of management and search*. (p. 270). Moscow: "Nauka".