Impact Factor:

ISRA (India)	= **4.971**	**SIS** (USA)	= **0.912**	**ICV** (Poland)	= **6.630**
ISI (Dubai, UAE)	= **0.829**	**РИНЦ** (Russia)	= **0.126**	**PIF** (India)	= **1.940**
GIF (Australia)	= **0.564**	**ESJI** (KZ)	= **8.716**	**IBI** (India)	= **4.260**
JIF	= **1.500**	**SJIF** (Morocco)	= **5.667**	**OAJI** (USA)	= **0.350**

QR – Issue **QR – Article**

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2019 **Issue:** 09 **Volume:** 77

Published: 20.09.2019 **http://T-Science.org**

Farkhod Ruzikulovich Tursunov
Samarkand State University,
Senior Lecturer of the Department of Differential equations,
The Republic of Uzbekistan, Samarkand city
farhod.tursunov.76@mail.ru

REGULARIZATION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FIRST-ORDER LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A BOUNDED DOMAIN

Abstract: *In the paper the continuation problem for the solution of the first order elliptic type linear system equations with constant coefficients in the domain G by given values on the smooth part S of the boundary ∂G is studied. The considered problem belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that the solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, an explicit formula for the continuation of the solution is established, as well as a regularization formula for the case when, under these conditions, instead of the Cauchy data, their approximations are given with a given error in the uniform metric. We obtain estimates for the stability of the solution of the Cauchy problem in the classical sense.*

Key words: *Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.*

Language: *Russian*

Citation: Tursunov, F. R. (2019). Regularization of the Cauchy problem for the first-order linear elliptic systems with constant coefficients in a bounded domain. *ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (77),* 101-106.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-09-77-19 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.09.77.19

Scopus ASCC: 2600.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация: *В работе изучается задача продолжения решения линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданными данными Коши. Для этого случая устанавливается явная формула продолжения решения, а также формула регуляризации для случая, когда при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с заданной погрешностью в равномерной метрике. Получены оценка устойчивости решения задачи Коши в классическом смысле.*

Ключевые слова: *Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.*

Введение и постановка задачи.

Пусть G - ограниченная односвязная область в $R^2 = \{x: x = (x_1, x_2)\}$ с границей $\partial G = S \cup Q$, состоящей из отрезка $Q = \{(x_1, 0): a_1 \le x_1 \le b_1\}$ и гладкой дуги S, являющейся кривой Ляпунова и лежащей в полуплоскости $R_+^2 = \{(0, x_2): x_2 > 0\}$. Положим $\overline{G} = G \cup \partial G$. Обозначим через A класс квадратных матриц $D(x)$ порядка $n, n \ge 2$, элементами которых являются линейные формы с комплексными коэффициентами таких, что выполняется равенство $D*(x)D(x) = (x_1^2 + x_2^2)I$; здесь $D*(x)$ - сопряженная к $D(x)$ матрица, I - единичная матрица.

Рассмотрим задачу Коши

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0, \qquad x \in G\,, \tag{1}$$

$$U(x)|S = f(x), \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $U(x) = (U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x))^T$; $n \geq 2$, здесь $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T$, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.

Система уравнений (1) представляет собой систему эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы охватывают широкий класс эллиптических систем; например, классическое уравнение Лапласа $\Delta w(x) = 0$ можно рассматривать как частный случай системы (1). К системам вида (1) приводят многие задачи математической физики [7]; такие системы рассматривались в ряде работ [5], [11]-[18], [20].

Рассматриваемая задача (1)-(2) относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. В работе [4] А. Н. Тихонову удалось выяснить истинную природу некорректных задач математической физики. Он указал практическую важность неустойчивых задач и показал, что если сузить класс возможных решений до компакта, то из существования и единственности следует устойчивость решения, т.е. задача становится устойчивой.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши-Римана в области специального вида. Развивая его идею, Г. М. Голузин и В. И. Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Они нашли формулу восстановления решения по ее значениям на граничном множестве положительной лебеговой меры, а также предложили новый вариант формулы продолжения. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А.Айзенберга [1]. Формула типа Карлемана, в которой используется фундаментальное решение дифференциального оператора со специальными свойствами (функция Карлемана), была получена М.М. Лаврентьевым [6,7]. В этих работах дано определение функции Карлемана для случая, когда данные Коши заданы приближенно, а также приведена схема регуляризации задачи Коши для уравнения Лапласа. Применяя этот метод, Ш. Я.Ярмухамедов [8,9] построил функции Карлемана для широкого класса эллиптических операторов, заданных в пространственных областях специального вида, когда часть границы области, является конической поверхностью либо гиперповерхностью. Формулы типа Карлемана для различных эллиптических уравнений и систем получены также в работах [6]-[10], [16]-[19].

В данной работе строится семейство вектор-функций $U(x, \sigma, f_\delta) = U_{\sigma\delta}(x)$, зависящих от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma = \sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$, при $\delta \to 0$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи Коши (1)-(2) в каждой точке $x \in G$. Семейство функций $U(x, \sigma, f_\delta)$ с указанным свойствами, согласно М.М. Лаврентьеву [6], называется регуляризованным решением задачи.

Основные результаты.

Если функция $U(x) \in C^1(G) \cap G(\bar{G})$ является решением системы (1), то верно следующее интегральное представление [5]:

$$U(x) = \int_{\partial G} M(x, y)\, U(y) dS_y, \tag{3}$$

где $M(x, y) = \left(E\left(\frac{1}{2\pi} ln \frac{1}{r} u^0\right) D*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) D(t), t = (t_1, t_2)^T$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y границы ∂G,

$y = (y_1, y_2)$,

$r = |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$,

$$E(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}$$

диагональная матрица размерность $n \times n$, $u^0 = (1,1,\dots,1) \in R^n, n \geq 2$.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на Q, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2 > 0$. Следуя М.М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана [7].

Конструкция функции Карлемана.

Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством:

$$-2\pi e^{\sigma x_2^2} \Phi_\sigma(x, y) = \int_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_2}\right] \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \tag{4}$$

где $\alpha = |y' - x'|$, $y' = (y_1, 0)$, $x' = (x_1, 0)$,

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_2, u \geq 0.$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем:

$$\Phi_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\sigma(\alpha^2 + x_2^2 - y_2^2)} \times$$

$$\times\left[\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\,\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}udu-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sigma u^2}(y_2-x_2)\sin 2\sigma y_2\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]. \qquad (5)$$

В работе [9] доказано, что функция определенная равенствами (4) при $\sigma > 0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r}+G_\sigma(x,y),$$

где $G_\sigma(x,y)$ - функция гармоническая по переменному y в R^2, включая $y=x$. (см. [9] стр. 765 - 767).

Формула (3) верна, если $\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r}$ заменить функцией $\Phi_\sigma(x,y)$ определяемой равенством (4). Тогда интегральное представление (3) имеет вид

$$U(x)=\int_{\partial G}N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y, x\in G, \qquad (6)$$

где

$$N_\sigma(x,y)=\left(E(\Phi_\sigma(x,y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T).$$

Положим

$$U_\sigma(x)=\int_S N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y, x\in G. \qquad (7)$$

Теорема 1. Пусть $U(x)$ вектор- функция из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, является решением системы (1), на S удовлетворяющее начальному условию (2) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|\le M, M>0, y\in Q. \qquad (8)$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедлива оценка

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le\psi_2(\sigma,x_2)Me^{-\sigma x_2^2}, \qquad (9)$$

где

$$\psi_2(\sigma,x_2)=\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}x_2}+1\right)e^{-\sigma x_2^2}, \qquad (10)$$

здесь c - некоторая постоянная.

Доказательство теоремы 1.

Обозначим через $I_\sigma(x)$ разность

$$I_\sigma(x)=U(x)-U_\sigma(x)=\int_{\partial G}N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y-$$

$$-\int_S N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y=\int_S N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y+$$

$$+\int_Q N_\sigma(x,y)\,U(y)dy_1-\int_S N_\sigma(x,y)\,U(y)dS_y=$$

$$=\int_Q N_\sigma(x,y)\,U(y)dy_1.$$

Тогда из (8) следует неравенство

$$|I_\sigma(x)|=\left|\int_Q N_\sigma(x,y)\,U(y)dy_1\right|\le MT_\sigma(x),$$

где

$$T_\sigma(x)=\int_Q|N_\sigma(x,y)|\,dy_1. \qquad (11)$$

Теорема 1 будет доказана, если установить справедливость неравенства

$$T_\sigma(x)\le\psi_2(\sigma,x_2)e^{-\sigma x_2^2}, \sigma>0. \qquad (12)$$

Докажем (12). Для доказательства неравенства (12) оценим комбинации интегралов типа

$$\sum_{k=1}^n\lambda_k\int_{\partial G}\sum_{j=1}^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}U(y)\,dS_y\,, n\ge 2.$$

Положим

$$\max_Q\sum_{k=1}^n\lambda_k=c,\ c=const.$$

Теперь оценим на части Q границы ∂G

$$\int_{\partial G}\sum_{j=1}^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}U(y)\,dS_y.$$

Следуя работе [9], имеем:

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}=-\frac{e^{\sigma y_2^2-\sigma x_2^2-\sigma(y_1-x_1)^2}}{2\pi}\times\frac{(y_1-x_1)\cos\tau(y_1-x_1)+(y_2-x_2)\sin\tau(y_1-x_1)}{r^2} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}=-\frac{e^{-\sigma|y_1-x_1|^2+\sigma y_2^2-\sigma x_2^2}}{2\pi}\times$$

$$\times\frac{(y_2-x_2)\cos\tau\,(y_1-x_1)+|y_1-x_1|\sin\tau\,|y_1-x_1|}{r^2},$$

$$\tau=2\sigma y_2. \qquad (14)$$

Полагая $y_2=0$ в (13) и оценивая имеем:

$$\int_Q\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}\right|dy_1=\int_{a_1}^{b_1}\left|-\frac{1}{2\pi}\frac{(y_1-x_1)e^{-\sigma(y_1-x_1)^2-\sigma x_2^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}\right|dy_1=$$

$$\le\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha e^{-\sigma\alpha^2}}{\alpha^2+x_2^2}d\alpha\le\frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}}\frac{1}{x_2}e^{-\sigma x_2^2}.$$

Таким образом, $\int_Q\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_1}\right|dy_1\le\frac{1}{4\sqrt{\sigma\pi}}\frac{1}{x_2}e^{-\sigma x_2^2}$.

Оценивая теперь $\int_Q\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_2}\right|dy_1$ и полагая $y_2=0$, будем иметь

$$\int_Q\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_2}\right|dy_1=\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{a_1}^{b_1}\frac{x_2e^{-\sigma|y_1-x_1|^2}}{(y_1-x_1)^2+x_2^2}dy_1\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_2}{y_1^2+x_2^2}dy_1=\pi\cdot\frac{1}{2\pi}e^{-\sigma x_2^2}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\sigma x_2^2}.$$

Учитывая, эти оценки получим:

$$T_\sigma(x)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{\sigma\pi}x_2}+1\right)e^{-\sigma x_2^2}, \sigma>0.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. При каждом $x\in G$ справедливы равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x),$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i=1{,}2.$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon=\{(x_1,x_2)\in G, a>x_2\ge\varepsilon,$$

$$a=\max_T h(x_1), 0<\varepsilon<a,\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ и $\left\{\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходиться равномерно при $\sigma\to\infty$, т.е.:

$$U_\sigma(x)\rightrightarrows U(x),$$

$$\frac{\partial U_\sigma(x)}{\partial x_i}\rightrightarrows\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i=1{,}2.$$

Следует отметить, что множества $\Pi_\varepsilon=G\backslash\overline{G}_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Предположим теперь, что кривая S задана уравнением $y_2 = h(y_1)$, $y_1 \in [a_1, b_1]$, где h однозначная функция, удовлетворяющая условиям Ляпунова. Положим

$$a = \max_Q h(y_1),\ b = \max_Q \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dy_1}\right)^2}.$$

Приведём оценку устойчивости решения задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка.

Теорема 2. Пусть на части Q границы ∂G выполняется неравенство (8) а на части S границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)| \le \delta,\ y \in S,\ 0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2}. \qquad (15)$$

Тогда для любого x $\in G$ и $\sigma > 0$ справедлива оценка

$$|U(x)| \le \theta(\sigma, x_2) M^{1 - x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}, \qquad (16)$$

где

$$\theta(\sigma, x_2) = \max_S (\psi^2(\sigma, x_2), \psi_2(\sigma, x_2)),$$

$\psi_2(\sigma, x_2)$ определяется по формуле (10),

$$\psi^2(\sigma, x_2) = \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma}ab}{2\sqrt{\pi}}\right)c,$$

$c = const.$

Доказательство теоремы 2. Из интегральной формулы (6) и теоремы 1 учитывая условие (8), а также неравенства (12) получим:

$$|U(x)| \le \int_S |N_\sigma(x,y) U(y)|\, dS_y + \int_Q |N_\sigma(x,y) U(y)|\, dS_y \le$$
$$|U_\sigma(x)| + M\psi_2(\sigma, x_2). \qquad (17)$$

где $U_\sigma(x)$ определяется по формуле (7).

Теперь с учетом формуле (13), повторяя рассуждение, доказательстве теоремы 1 имеем:

$$\int_S \left|\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_1}\right| dS_y \le \int_{a_1}^{b_1} \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \left\{ \frac{|y_1 - x_1| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} + \frac{|y_2 - x_2||\sin 2\sigma y_2(y_1 - x_1)| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \right\} dy_1.$$

Теперь оценивая эти интегралы получим:

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \frac{|y_1 - x_1| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} dy_1 + \int_{a_1}^{b_1} \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \times$$
$$\times \frac{|y_2 - x_2||\sin 2\sigma y_2(y_1 - x_1)| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} dy_1 \le$$
$$\le \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y_1 - x_1| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} dy_1 + \frac{be^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{2\pi} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\sigma a |y_1 - x_1||y_2 - x_2| e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2}}{(1 + 2\sigma a|y_1 - x_1|)(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} dy_1$$
$$+ \frac{ab\sigma e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma(y_1 - x_1)^2} dy_1 =$$
$$= \left(\frac{b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}.$$

При оценке интегралов, использовано следующие неравенства

$$|\sin 2\sigma y_2(y_1 - x_1)| \le \frac{4\sigma|y_2(y_1 - x_1)|}{1 + 2\sigma|y_2(y_1 - x_1)|},$$

которая следует из $|\sin x| \le \frac{2|x|}{1+|x|}$, $x \ge 0$,

$$\frac{|y_1 - x_1|}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} < \frac{1}{2(a - x_2)},$$
$$\frac{|y_1 - x_1||y_2 - x_2|}{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \le \frac{1}{2}.$$

Далее с учетом формулы (14) повторяя рассуждение, вышеуказанных оценок интегралов получим:

$$\int_S \left|\frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right| dS_y \le$$
$$\le \left(\frac{b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}.$$

Сложив полученные оценки имеем:

$$\int_S \left|\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_j}\right| dS_y \le$$
$$\le \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma}ab}{\sqrt{\pi}}\right) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}.$$

Из интегральной формулы (17) и условия (15) получим:

$$|U(x)| \le \delta \int_S |N_\sigma(x,y)|\, dS_y + M \int_Q |N_\sigma(x,y)|\, dS_y \le$$
$$\le \delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} \left(\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a - x_2)} + \frac{2\sqrt{\sigma}ab}{2\sqrt{\pi}}\right) +$$
$$+ Me^{-\sigma x_2^2} \left(\frac{1}{4\sqrt{\sigma\pi} x_2} + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \theta(\sigma, x_2)(Me^{-\sigma x_2^2} + \delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}). \qquad (18)$$

Наилучшая оценка для функции $|U(x)|$ получается в случае, когда

$$Me^{-\sigma x_2^2} = \delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}$$

или

$$\sigma = \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}. \qquad (19)$$

Подставляя выражение для σ из равенства (19) в (18) получим доказательство неравенства (16).

Теорема 2 доказана.

Положим

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_S N_\sigma(x,y)\, U(y) dS_y, \quad x \in G. \qquad (20)$$

Теорема 3. Пусть вектор - функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ являющееся решением системы (1), на S удовлетворяет условие (2) и $|U(y)| \le M$, $y \in Q$. Если заданы приближения функции $f(x)$, $f_\delta(x) \in C(S)$ с заданным уклонением $\delta > 0$ т.е.:

$$\max_S |f(x) - f_\delta(x)| < \delta,\ 0 < \delta \le Me^{-\sigma a^2},$$

тогда для любого $x \in G$ справедлива оценка

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq \theta(\sigma, x_2) M^{1-x_2^2/a^2} \delta^{x_2^2/a^2}. \quad (21)$$

Доказательство теоремы 3.

Находим разность:

$$U(x) - U_{\sigma\delta}(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x,y)\, U(y) dS_y$$
$$- \int_S N_\sigma(x,y)\, U_\delta(y) dy_1 =$$
$$= \int_S N_\sigma(x,y)\, U(y) dS_y + \int_Q N_\sigma(x,y)\, U(y) dy_1$$
$$- \int_S N_\sigma(x,y)\, U_\delta(y) dS_y =$$
$$= \int_S N_\sigma(x,y)[f(y) - f_\delta(y)] dS_y$$
$$+ \int_Q N_\sigma(x,y)\, U(y) dy_1.$$

Тогда из теоремы 1 и 2, с учетом условия теоремы 3 получим:

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| =$$
$$= \left| \int_S N_\sigma(x,y)[f(y) - f_\delta(y)] dS_y \right| +$$
$$+ \left| \int_Q N_\sigma(x,y)\, U(y) dy_1 \right| \leq$$
$$\leq M \int_Q |N_\sigma(x,y)|\, dy_1 + \delta \int_S |N_\sigma(x,y)|\, dS_y \leq$$
$$\leq M\psi_2(\sigma, x_2) e^{-\sigma x_2^2} + \delta \int_S |N_\sigma(x,y)|\, dS_y. \quad (22)$$

Здесь $\psi_2(\sigma, x_2)$ определяется по формуле (10). Утверждение теоремы 3 следует из неравенства

$$\int_S |N_\sigma(x,y)|\, dS_y \leq$$
$$\leq \psi^2(\sigma, x_2) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}, \quad \sigma > 0, \quad x_2 > 0 \quad (23)$$

Действительно, из (22) и (23) получим:

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq M\psi_2(\sigma, x_2) e^{-\sigma x_2^2} +$$
$$+ \delta\psi^2(\sigma, x_2) e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2} =$$
$$= \theta(\sigma, x_2)(M e^{-\sigma x_2^2} + \delta e^{\sigma a^2 - \sigma x_2^2}). \quad (24)$$

Подставляя выражение для σ из равенства (19) в (24) получим оценку (21).

Теорема 3 доказана.

Следствие 3. При каждом $x \in G$ справедливы равенства

$$\lim_{\delta \to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x),$$
$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i = 1,2.$$

Следствие 4. Если $x \in \overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$и $\left\{\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходиться равномерно при $\delta \to 0$, т.е.:

$$U_{\sigma\delta}(x) \rightrightarrows U(x),$$
$$\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i} \rightrightarrows \frac{\partial U(x)}{\partial x_i}, i = 1,2.$$

Заключение.

В статье получены следующие результаты:

при помощи функции Карлемана, получена формула продолжения решения линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Полученная формула является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтера и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений. Приведена оценка устойчивости решения задачи Коши в классическом смысле. Рассмотрена задача, когда вместо точных данных задачи Коши даны их приближения с заданным уклонением в равномерной метрике и в предположении, что решение задачи Коши ограничено на части Q границы области G, получена явная формула регуляризации.

References:

1. Ayzenberg, L. A. (1990). *Formuli Karlemana v kompleksnom analize.* (p.247). Novosibirsk: «Nauka».
2. Carlemah, T. (1926). *Les Functions quasi analytiques.* (p.116). Paris: Gauthier- Villar.
3. Goluzin, G. M., & Krilov, V. I. (1933). Obobshyennaya formula Karlemana i yeye prilojeniye k analiticheckomu prodoljeniyu funksiy. *Mat. sbornik, T. 40*, pp.144-149.
4. Tixonov, A. N. (1943). Ob ustoychivosti obratnix zadach. *DAN SSSR, 5(39)*, pp.195-198.
5. Tarxanov, N. N. (1980). Ob integralnom predstavlenii resheniy sistem lineynix differensialnix uravneniy pervogo poryadka v chastnix proizvodnix i nekotorix yego prilojeniyax. *Nekotoriye voprosi mnogomernogo kompleksnogo analiza*. Krasnoyarsk, pp.147-160.
6. Lavrentyev, M.M. (1956). O Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa. *Izv. AN SSSR Ser. matem, 6(20)*, pp.819-842.

7. Lavrentyev, M. M. (1962). *O nekotorix nekorrektnix zadachax matematicheskoy fiziki*. Izd. SO AN SSSR Novosibirsk.
8. Yarmuxamedov, S. (2002). O garmonicheskom prodoljenii differensiruyemix funksiy, zadannix na kuske granisi. *Sibirskiy matematicheskiy jurnal*, *1(43)*, pp.228-239.
9. Yarmuxamedov, S. (2008). Predstavleniye garmonicheskoy funksii v vide potensialov i zadacha *Koshi*. *Matematicheskiye zametki*, *5(83)*, pp.763-778.
10. Polkovnikov, A. N., & Shlapunov, A. A. (2017). Construction of Carleman formulas by using mixed problems with parameter-dependent boundary conditions. *Siberian Math. J., 4(58)*, pp.676–686.
11. Bisadze, A. V. (1953). Prostranstvenniy analog integrala tipa Koshi i nekotoriye yego primeneniya. *Dokl. AN SSSR, T.93*, pp. 389-392.
12. Vinogradov, V. S. (1968). Ob analoge integrala tipa Koshi dlya analiticheskix funksiy mnogix kompleksnix peremennix. *Dokl. AN SSSR*, *2(178)*, pp. 282-285.
13. Vinogradov, V. S. (1964). Ob odnom analoge sistemi Koshi Rimana v chetirexmernom prostranstve. *DAN SSSR*, *1(154)*, pp. 16-19.
14. Dezin, A. A. (1962). Invariantniye differensialniye operatori i granichniye zadachi. *Trudi matematicheskogo instituta im. V. A. Steklova. Izv. AN. SSSR*, *T.68*, pp. 53-54.
15. Shneyerson, M. S. (1959). Mnogomerniy analog integrala tipa Koshi. *Izv. Vuzov, Matematika*, *4*, pp. 232-239.
16. Malikov, Z., & Tursunov, F. R. (2005). O zadachi Koshi dlya lineynix sistem ellipticheskogo tipa pervogo poryadka s postoyannimi koeffisiyentami v neogranichennoy oblasti. *Uzbekskiy matematicheskiy jurnal*, *1*, pp. 53-63.
17. Tursunov, F. R. (2014). Zadachi Koshi dlya sistem ellipticheskogo tipa pervogo poryadka s postoyannimi koeffisiyentami. *Yejemesyachniy nauchniy jurnal*, *Molodoy uchenniy, ISSN 2072-0229, 2(61)*, pp.30-36.
18. Tursunov, F. R. (2017). Regulyarizasiya zadachi Koshi dlya lineynix sistem uravneniy ellipticheskogo tipa pervogo poryadka s postoyannimi koeffisiyentami v neogranichennoy oblasti. *Uzbekskiy matematicheskiy jurnal, №1*, pp.129-140.
19. Shlapunov, A. A. (1992). O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa. *Sibirskiy matematicheskiy jurnal*, *3(33)*, pp. 205-215.
20. Kabanixin, S. I. (2009). *Obratniye i nekorrektniye zadachi*. (p.457). Novosibirsk: Sibirskiye nauchnoye izdatelstvo.