SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 12 Volume: 80

Published: 09.12.2019 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

Ablakul Abdirashidov
Samarkand State University
Corresponding member of International Academy, Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor to department of Theoretical and Applied mechanics, Uzbekistan
abdira@mail.ru

Gulnoza Abdirashidova
Samarkand State Medical Institute
Researcher, Uzbekistan

APPROXIMATE SOLUTION OF SOME LINEAR DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MEDICINE

***Abstract**: In this paper, the variational iteration method is applied to delay differential equations. Illustrative examples the from medicine are given to show the efficiency of the method.*

***Key words**: delay differential equations; variational iteration method; approximate and exact solution.*
***Language**: Russian*
***Citation**:* Abdirashidov, A., & Abdirashidova, G. (2019). Approximate solution of some linear delay differential equations in medicine. *ISJ Theoretical & Applied Science, 12 (80),* 18-22.
***Soi**:* http://s-o-i.org/1.1/TAS-12-80-3 ***Doi**:* crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.12.80.3
***Scopus ASCC**: 2700.*

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В МЕДИЦИНЕ

***Аннотация**: В данной работе вариационный итерационный метод применяется для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Наглядные примеры из медицины приведены для демонстрации эффективности метода.*

***Ключевые слова**: дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом; метод вариационных итераций; приближенное и точное решение.*

Введение

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (ДУЗА) обеспечивают мощную модель многих явлений в прикладных науках. Математическое моделирование с ДУЗА широко используется для объяснения многих различных явлений в области наук о жизни, например, эпидемиология, иммунология, физиология и нейронные сети [6-10]. Запаздывание в этих моделях могут быть связаны с продолжительностью некоторых скрытых процессов, таких как этапы жизненного цикла, время между заражением клетка и производство новых вирусов, продолжительность инфекционный период, иммунный период и т.д. В обыкновенные дифференциальные уравнения, неизвестное состояние и его производные оцениваются в одно и то же время. В ДУЗА, однако, эволюция системы в определенное время момент зависит от прошлой истории/памяти. Введение запаздывание в дифференциальной модели значительно увеличивается сложность модели.

Недавно введенный метод вариационных итераций [1-5], который дает быстро сходящиеся последовательные приближения точного решение, если такое решение существует, оказалось успешным в вывод аналитических решений линейного и нелинейного дифференциального уравнения. Этот метод предпочтительнее численных методов поскольку он свободен от ошибок округления и не требует ни большая мощность компьютера/памяти. Метод вариационных итераций был успешно применен к линейным и нелинейным задачам исследователями [5-15].

Основная идея данной статьи является расширение применения метода вариационных итераций для решения некоторых линейных ДУЗА разного порядка, которые в противном случае слишком сложны для обработки из-за их сложной природы.

Постановка задачи.

Рассмотрим следующую форму ДУЗА, которая содержит большой класс ДУЗА

$$u^{(m)}(t)=\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{m-1}\lambda_{ij}(t)u^{(j)}(\alpha_{ij}t+\beta_{ij})+$$
$$L(u)+N(u)+f(t),\quad t\in[0,T]$$

с начальными условиями

$$\sum_{j=0}^{m-1}c_{kj}u^{(j)}(0)=q_k,\quad k=0,1,...,m-1,$$

где $0\le\alpha_{ij}\le1$; $\beta_{ij}\in R$; $u^{(m)}(t)$ – производная от функции *u* в *m* раз по *t*; *L*, *N* – линейный и нелинейный операторы от функции *u* соответственно;

Решение задачи (*Метод вариационных итераций*).

Ниже представлен основная идея, лежащая в основе метода вариационных итераций для решения линейных и нелинейных уравнений.

Рассмотрим общее нелинейное дифференциальное уравнение в виде

$Lu + Nu = f(t)$ (1)

где *L* - линейный дифференциальный оператор, *N* - нелинейный оператор, а *f* - заданная аналитическая функция. Сущность метод заключается в построении корректирующего функционала вида

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+$$
$$+\int_0^t\lambda(t,s)\left[Lu_n(s)+N\tilde{u}_n(s)-f(s)\right]ds. \quad (2)$$

где λ множитель Лагранжа, который может быть оптимально определен с помощью вариационной теории [1-5], u_n является приближенным решение, $\tilde{u}_n$ обозначает ограниченную вариацию, то есть $\delta\tilde{u}_n=0$ [1-5]. После определения множителя Лагранжа и выбора подходящая начальная функция u_0, последовательные приближения u_n, и могут быть легко получены решения *u*. Следовательно, решение уравнения (1) определяется как $u=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ [5].

Практическое применение.

Пример 1. Рассмотрим следующую линейную ДУЗА [11]

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)+u(t)-\dfrac{1}{2}u\left(\dfrac{t}{2}\right)-\dfrac{d}{dt}u\left(\dfrac{t}{2}\right)=0, t\in[0,1],\\ u(0)=1,\end{cases}$$

который имеет точное решение $u(t) = e^{-t}$.

Метод вариационных итераций [3,5].

Для данного случая $\lambda = e^{s-t}$, а итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)-\int_0^t e^{s-t}\left[\frac{d}{ds}u_n(s)+u_n(s)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right)-\frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)=1$. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17:

$$u_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t},\quad u_2(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}e^{-t},$$
$$u_3(t)=\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^{-t},\ \ldots,\quad u_n(t)=\frac{1}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n}e^{-t}.$$

Точное решение находим из предела $u(t)=\lim\limits_{t\to\infty}u_n(t)=e^{-t}$.

Если λ =-1, то итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)-\int_0^t\left[\frac{d}{ds}u_n(s)+u_n(s)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right)+\frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)=1$. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17. После 15-итерации абсолютная погрешность не превышает 10^{-5}, а дальнейшие приближения более точно уточняет решение задачи.

Пример 2. Рассмотрим следующую линейную ДУЗА [11]

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)-u(t)+\dfrac{1}{2}u\left(\dfrac{t}{2}\right)-\dfrac{d}{dt}u\left(\dfrac{t}{2}\right)=0,\ t\in[0,1],\\ u(0)=1,\end{cases}$$

который имеет точное решение $u(t) = e^{t}$.

Метод вариационных итераций [3,5].

Для данного случая $\lambda = e^{t-s}$, а итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t e^{t-s}\left[\frac{d}{ds}u_n(s) - u_n(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)$=1. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17:

$$u_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t, \quad u_2(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^t,$$

$$u_3(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^t, \ \ldots, \quad u_n(t) = \frac{1}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^n}e^t.$$

Точное решение находим из предела $u(t) = \lim\limits_{t\to\infty} u_n(t) = e^t$.

Если берем λ =-1, то итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \left[\frac{d}{ds}u_n(s) - u_n(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение находим оставляем таким же, т.е. $u_0(t)$=1. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17. Как и в предыдущем примере, после 15-итерации абсолютная погрешность не превышает 10^{-5}, а дальнейшие приближения более точно уточняет решение задачи.

Пример 3. Рассмотрим следующую линейную ДУЗА [11]

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) - u(t) - \frac{1}{2}u\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{d}{dt}u\left(\frac{t}{2}\right) - \\ -e^t - \frac{1}{2}e^{t/2} = 0, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

который имеет точное решение $u(t) = te^t$.

Метод вариационных итераций [3,5].

Для данного случая $\lambda = e^{t-s}$, а итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t e^{t-s}\left[\frac{d}{ds}u_n(s) - u_n(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - e^s - \frac{1}{2}e^{s/2}\right]ds.$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)$=0. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17:

$$u_1(t) = te^t + e^t - e^{t/2},$$

$$u_2(t) = te^t - \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{t/4},$$

$$u_3(t) = te^t + \frac{1}{7}e^t - \frac{1}{7}e^{t/8}, \ \ldots,$$

$$u_n(t) = te^t + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n - 1} + \frac{(-1)^n}{2^n - 1}e^{t/2^n}.$$

Точное решение находим из предела $u(t) = \lim\limits_{t\to\infty} u_n(t) = te^t$.

Если берем λ =-1, то итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \left[\frac{d}{ds}u_n(s) - u_n(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - e^s - \frac{1}{2}e^{s/2}\right]ds.$$

Начальное приближение остается таким же, т.е. $u_0(t)$=0. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17. Как и в предыдущем примере, после 15-итерации абсолютная погрешность не превышает 10^{-6}, а дальнейшие приближения более точно уточняет решение задачи.

Пример 4. Рассмотрим следующую линейную ДУЗА [11]

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) - u(t) - \frac{1}{2}u\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{4}tu\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{d}{dt}u\left(\frac{t}{2}\right) + \\ + t\frac{d^2}{dt^2}u\left(\frac{t}{2}\right) = 0, \quad t \in [0,1], \\ u(0) = 1, \quad \frac{d}{dt}u(0) = 1, \end{cases}$$

который имеет точное решение $u(t) = e^t$.

Метод вариационных итераций [3,5].

Для данного случая $\lambda = s-t$, а итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s-t)\left[\frac{d^2}{ds^2}u_n(s) - u_n(s) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{4}su_n\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right) + s\frac{d^2}{ds^2}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)$=1+t. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета

Maple 17. Как и в предыдущем примере, после 6-итерации абсолютная погрешность не превышает 10^{-10}, а дальнейшие приближения более точно уточняет решение задачи.

Если для данного случая выбираем $\lambda = e^{t-s}$, то итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t e^{t-s}\left[\frac{d^2}{ds^2}u_n(s) - u_n(s) - \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{4}su_n\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right) + s\frac{d^2}{ds^2}u_n\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds.$$

Начальное приближение остается таким же, т.е. $u_0(t)=1+t$. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17. В этом случае результаты итераций приближается медленно к точному решению.

Пример 5. Рассмотрим следующую линейную ДУЗА [11]

$$\begin{cases} \frac{d^3}{dt^3}u(t) - u(t) + \frac{1}{2}u\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{9}u\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{64}u\left(\frac{t}{4}\right) - \\ -\frac{d}{dt}u\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{d^2}{dt^2}u\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{d^3}{dt^3}u\left(\frac{t}{4}\right) = 0, \ t \in [0,1], \\ u(0) = \frac{d}{dt}u(0) = \frac{d^2}{dt^2}u(0) = 1, \end{cases}$$

который имеет точное решение $u(t) = e^t$.

Метод вариационных итераций [3,5].

Для данного случая $\lambda = -(s-t)^2/2$, а итерационная формула пишутся в виде

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \int_0^t \frac{(s-t)^2}{2}\left[\frac{d^3}{ds^3}u_n(s) - u_n(s) + \frac{1}{2}u_n\left(\frac{s}{2}\right) - \frac{1}{9}u_n\left(\frac{s}{3}\right) - \frac{1}{64}u_n\left(\frac{s}{4}\right) + \frac{d}{ds}u_n\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{d^2}{ds^2}u_n\left(\frac{s}{3}\right) + \frac{d^3}{ds^3}u_n\left(\frac{s}{4}\right)\right]ds,$$

Начальное приближение находим из начального условия, т.е. $u_0(t)=1+t+t^2/2$. Последующие приближения находим с помощью предыдущей формулы используя математического пакета Maple 17. Как и в предыдущем примере, после 3-итерации абсолютная погрешность не превышает 10^{-7}, а дальнейшие приближения более точно уточняет решение задачи.

Выводы.

Были продемонстрированы выполнимость метода вариационных итераций для решения ДУЗА. Получены высокоточные приближенные решения, или даже точное решение, только после нескольких итераций. Все приведенные примеры показывают, что результаты метода вариационных итераций согласие с теми, которые генерируются некоторыми другими методами [14,15]. Численные результаты также показывают, что метод вариационных итераций дает очень эффективный и удобный подход к приближенному решению ДУЗА и других уравнений [7-9,12-15].

References:

1. He, J. H. (1997b). Variational iteration method for delay differential equations. Commun. *Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2 (4),* 235–236.
2. He, J. H. (1999). Variational iteration method. A kind of non-linear analytical technique: Some examples, *Internat. J. Non-Linear Mech. 34 (4),* 699-708.
3. He, J. H. (2007). Variational iteration method. Some recent results and new interpretations, *J. Comput. Appl. Math. 207 (1)*, 3-17.
4. He, J. H., Wu, G., & Austin F. (2010). The variational iteration method which should be followed, *Nonlinear Sci. Lett. A 1 (1)*, 1-30.
5. He, J. H., & Wu, X. H. (2007). Variational iteration method: New development and applications, *Comput. Math. Appl. 54 (7-8),* 881-894.
6. Lakshmanan, S., Rihan, F. A., Rakkiyappan, R., & Park, J. H. (2014). Stability analysis of the differential genetic regulatory networksmodel with time-varying delays and Markovian jumping parameters. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, vol. 14,* pp. 1–15.
7. Rakkiyappan, R., Velmurugan, G., Rihan, F. A., & Lakshmanan, S. (2015). Stability analysis of memristor-based complex-valued recurrent neural networks with time delays. *Complexity, vol. 21, no.4,* pp. 14–39.
8. Rihan, F. A., Abdelrahman, D. H., Al-Maskari, F., Ibrahim, F., & Abdeen, M. A. (2014). Delay differential model for tumour-immune response

with chemoimmunotherapy and optimal control, *Computational and Mathematical Methods in Medicine, vol. 2014,* Article ID982978, p.15.

9. Bani-Yaghoub, M. (2017). *Analysis and Applications of Delay Differential Equations in Biology and Medicine.* arXiv preprint arXiv:1701.04173, 23 pages.
10. Khader, M. M. (2013). Numerical and theoretical treatment for solving linear and nonlinear delay differential equations using variational iteration method. *Arab J Math Sci*, *19(2)*, 243–256.
11. Xumei, C., & Linjun, W. (2010). The variational iteration method for solving a neutral functional-differential equation with proportional delays. *Computers and Mathematics with Applications*, *59*, 2696-2702.
12. Abdurashidov, A. A. (2017). Primeneniye metoda variasionnix iterasiy k priblijennomu resheniyu integro-differensialnix uravneniy. *Mejdunarodniy nauchniy jurnal: Continuum. Matematika. Informatika. Obrazovaniye, 3 (7)*, Yeles, Moscow, pp. 51-55.
13. Abdurashidov, A. A. (2017). Resheniya nelineynix volnovix uravneniy metodom variasionnix iterasiy. *Mejdunarodniy nauchniy jurnal: Molodoy ucheniy*, *6*, pp. 4–8.
14. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* (p.761). Higher Education Press, Berlin Heidelberg.
15. Kudryashov, N.A. (2010) *Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki:* Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. (p.368). Dolgoprudniy: Intellekt.