Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500
SIS (USA) = 0.912
РИНЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184
ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 11 Volume: 103

Published: 12.11.2021 http://T-Science.org

QR – Issue QR – Article

T. Absalamov
unemployed
researcher
tolliboyabsalamov@gmail.com

BISINGULAR INTEGRAL OF CAUCHY WITH SUMMABLE DENSITY

***Abstract**: It is obtained a Zigmund type estimate for the bisingular integral in the space of Summation functions. It is constructed an invariant functional space based on the inequality.*

***Key words**: bisingular integral operator, Zigmund type estimate, invariant space.*
***Language**: Russian*
***Citation**: Absalamov, T. (2021). Bisingular integral of Cauchy with summable density. *ISJ Theoretical & Applied Science, 11 (103),* 428-431.
***Soi**: http://s-o-i.org/1.1/TAS-11-103-41 ***Doi**: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.11.103.41
***Scopus ASCC**: 2600.*

БИСИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ КОШИ С СУММИРУЕМОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

***Аннотация**: Получены оценки типа оценки Зигмунда для бисингулярного интеграла. На основе полученных оценок строится класс функций инвариантного относительно бисингулярного оператора.*

***Ключевые слова**: бисингулярный интеграл, оценка Зигмунда, инвариантное пространство.*

Введение

Классическая теорема об ограниченности сингулярного оператора с ядром Гильберта в пространствеL_p $(p>1)$

$$\|\tilde{f}\|_{L_p[-\pi,\pi]} \le A_p \|f\|_{L_p[-\pi,\pi]} ,$$

где$\tilde{f}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)ctg\frac{s-x}{2}ds$, а A_p –постоянная зависящая лишь от p была доказана Н.Н. Лузиным [7] при $p=2$ и М. Риссом [17] при $p>1$.

В дальнейшем этот результат был перенесен в ряде работ для довольно широких классов жордановых спрямляемых кривых. Подробная предистория этого вопроса имеется в работе [11] см., кроме того, А. П. Кальдерон [13],[14]и Давида [12].

Для изучения особого интеграла

$$\tilde{u}(x)=\int_a^b \frac{u(s)}{s-x}ds\,,\ x\in(a,b) \text{ и}$$

$(-\infty<a<b<+\infty)$ с суммируемой плотностью в работе [5],[11]для функции $u\in L_p^{loc}(a,b)$ – множества функций, суммируемых в $p-$ой степении на любом внутренным отрезке в интервале (a,b), были введены характеристики

$$\Omega_p(u,\xi,\eta)=\Big(\int_{a+\xi}^{b-\eta}|u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\quad \xi,\eta>0\,,\xi+\eta\le b-a=l,$$

$$\omega_p(u,\delta,\xi,\eta)=\sup_{0<h\le\delta}\Big(\int_{a+\xi}^{b-\eta-h}|u(x+h)-u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\,,\xi+\eta+h\le l,\delta>0$$

и при 1 <p< $+\infty$ доказаны оценки, $(\Omega_p(\tilde{u}),\omega_p(\tilde{u}))$, через $(\Omega_p(u),\omega_p(u))$.

В предельном случае при $p=\infty$ и $u\in C_{[a,b]}$ эти результаты были получены в [1],[8], было показано, что оценки [2] в определенном смысле неулучшаемы. В [10] с помощью теоремы М.Рисса об ограниченном действии оператора $\tilde{u}$ в пространстве $L_p(a,b)$, уточнены результаты, полученные в [1], [3].

Одной из первых работ, посвященных повторному особому интегралу с ядром Гильберта $(Bf)(x_1,x_2) = g(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y+\tau)ctg\frac{t}{2}ctg\frac{\tau}{2}dtd\tau$,

была работа Л. Чезари [15]. Он доказал, что если $f \in H^2_{(\delta_1^\alpha,\delta_2^\alpha)}$ то

$$g \in H^2_{(\delta_1^\alpha|ln\delta_1|,\delta_2^\alpha|ln\delta_2|)}$$

Следуя Л.Чезари, И.Е.Жак [6] в своей работе также показал, что класс функций $H^2_{(\delta_1^\alpha,\delta_2^\alpha)}$ не инвариантен относительно оператора B. В этой же работе доказано, что классы функций

$$H^{\alpha,\beta} = \{f \in C_{[-\pi,\pi]^2}:$$
$$\omega_f(\delta_1,\delta_2) = O\left(\delta_1^\alpha\delta_2^\beta\right),$$
$$\omega_f^1(\delta_1) = O(\delta_1^\alpha),$$
$$\omega_f^2(\delta_2) = O\left(\delta_2^\beta\right), 0<\alpha,\beta<1\}$$

инвариантны относительно оператора B.

Рассмотрим бисингулярный интеграл вида:

$$\tilde{u}(x_1,x_2) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2,$$

где функция

$$u \in L_p^{loc}(a_1,b_1) =$$
$$=\{u: \forall\xi_1,\eta_1>0, \xi_1+\eta_1 \le b_1-a_1 = l_1, u \in L_p[a_1+\xi_1, b_1-\eta_1, a_2, b_2]\},$$
$$p>1.$$

Введем характеристики

$$\Omega_{p,1}(u,\xi_1,\eta_1,\xi) = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{a_2}^{a_2+\xi}|u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega_{p,2}(u,\xi_1,\eta_1,\xi) = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1}\int_{b_2-\xi}^{b_2}|u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\right)^{1/p},$$

$$\omega_{p,1}(u,\delta,\xi_1,\eta_1,\xi) = \sup_{0<h<\delta}\left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1-h}\int_{a_1}^{a_1+\xi}|u(x_1+h,x_2)-u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p,2}(u,\delta,\xi_1,\eta_1,\xi) = \sup_{0<h<\delta}\left(\int_{a_1+\xi_1}^{b_1-\eta_1-h}\int_{b_2-\xi}^{b_2}|u(x_1+h,x_2)-u(x_1,x_2)|^p dx_1dx_2\right)^{1/p},$$

где $\xi_1+\eta_1+h \le l_1,\ \delta>0.$

Пользуясь [16-19] доказано

Teorema 1. Пусть $u\epsilon L_p^{loc}(a_1,b_1)$. Тогда при сходимости соответствующих интегралов справедливо неравенства

$$\Omega_{p,i}(\tilde{u},\xi_1,\eta_1,\xi) \le C_p\left[\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_{\xi}^{l_2}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t_1,\frac{l_1}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2 + \frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_{\xi}^{l_2}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,\frac{l_1}{2},t_1,t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2\right.$$
$$\left.+\xi^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u,t_1,\frac{l_1}{2},l_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}}dt_1 + \frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u,\frac{l_1}{2},t_1,l_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}}dt_1 + \Omega_{p,i}\left(u_1,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2},l_2\right)\right)\right],$$
$$\xi \in \left[0,\frac{l_2}{4}\right]$$

$$\Omega_{p,i}(\tilde{u},\xi_1,\eta_1,\xi) \le C_p\left[\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t,\frac{l_1}{2},l_2\right)}{t^{\frac{1}{q}}}dt + \frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t,\frac{l_1}{2},l_2\right)}{t^{\frac{1}{q}}}dt\right],$$
$$\xi \in \left[\frac{l_2}{4},l_2\right]$$

$$\omega_{p,i}(\tilde{u},\delta,\xi_1,\eta_1,\xi) \le$$

$$\le C_p\left[\frac{\delta}{\xi_1+\delta}\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,t_1,\frac{l_1}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+\frac{\delta}{\eta_1+\delta}\frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_1,\frac{l_1}{2},t_1,t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2\right.$$

$$\left.+\xi^{\frac{1}{p}}\omega_{p,i}\left(u,\delta,\frac{\xi_1}{2},\frac{\eta_1}{2},l_2\right)\right],$$

где $0<\delta\le\min\{\xi_1,\eta_1\},\ i=1{,}2.$

Обозначим через G класс пар положительных функций $(\varphi(\xi_1,\eta_1,\xi),\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi))$ определенных соответственно на множествах $\{\xi_1,\eta_1,\xi>0,\xi_1+\eta_1\le l_1\}$, $\{0<\delta,\xi_1,\eta_1,\xi,\xi_1+\eta_1\le l_1\}$ и таких, что $\varphi(\xi_1,\eta_1,\xi),\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)$ почти убывает по ξ_1, η_1 и неубывающими поξ(равномерно по остальным аргументам), $\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)$ почти возрастает по δ (равномерно по остальным аргументам), $\frac{\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)}{\delta}$ почти убывает по δ (равномерно по остальным аргументам), $\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)\to0$ при $\delta\to0$.

Пусть $(\varphi,\psi)\in G$. Обозначим через $H^p_{\varphi\psi}$ множество функций из $L^{loc}_p(a_1,b_1)$ таких, что существует постоянные $C_1,\ C_2>0$,

$$\Omega_{p,i}(u,\xi_1,\eta_1,\xi)\le C_1\varphi(\xi_1,\eta_1,\xi)$$

$$\omega_{p,i}(u,\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)\le C_2\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi).$$

Множество $H^p_{\varphi\psi}$ в норме

$$\|u\|_{H^p_{\varphi\psi}}=$$

$$=\max_i\left\{\sup_{\xi_1,\eta_1,\xi}\frac{\Omega_{p,i}(u,\xi_1,\eta_1,\xi)}{\varphi(\xi_1,\eta_1,\xi)},\ \sup_{\xi_1,\eta_1,\xi}\frac{\omega_{p,i}(u,\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)}{\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi}\right\}$$

является банаховым пространством.

Множество тех $(\varphi,\psi)\in G$ для которых сходятся интегралы

$$\int_0^{\frac{l_1}{2}}\int_0^{\frac{l_2}{2}}\frac{\varphi\left(t_1,\frac{l}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2,\ \int_0^{\frac{l_1}{2}}\int_0^{\frac{l_2}{2}}\frac{\varphi\left(\frac{l}{2},t_1,t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2$$

обозначим через G_0.

Теорема 3. Пусть $(\varphi,\psi)\in G_0$. Тогда оператор $\tilde{u}$ действует из $H^p_{\varphi\psi}$ в $H^p_{\bar{\varphi}\bar{\psi}}$ и ограничен, где

$$\bar{\varphi}(\xi_1,\eta_1,\xi)=\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\varphi\left(t_1,\frac{l_1}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+\frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\varphi\left(\frac{l_1}{2},t_1,t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2$$

$$\bar{\psi}(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)=\frac{\delta}{\xi_1+\delta}\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\xi_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\varphi\left(t_1,\frac{l_1}{2},t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+$$

$$+\frac{\delta}{\eta_1+\delta}\frac{1}{\eta_1^{\frac{1}{q}}}\xi^{\frac{1}{p}}\int_0^{\frac{\eta_1}{2}}\int_\xi^{l_2}\frac{\varphi\left(\frac{l_1}{2},t_1,t_2\right)}{t_1^{\frac{1}{p}}t_2^{1+\frac{1}{p}}}dt_1dt_2+\xi^{\frac{1}{p}}\psi(\delta,\xi_1,\eta_1,\xi)$$

Обозначим через H_p класс пар положительных функций $(\varphi(\xi_1,\xi),\psi(\delta,\xi_1,\xi))$, удовлетворяющих условиям:

1. $\frac{1}{\xi_1^{\frac{1}{q}}}\int_0^{\xi_1}\int_0^{\xi}\frac{(t_1t_2)^{\frac{1}{q}}\varphi(t_1,t_2)}{t_1t_2}dt_1dt_2=$

$$=O\left((t_1t_2)^{\frac{1}{q}}\varphi(\xi_1,\xi)\right)$$

2. $\psi\left(\delta,\frac{\xi_1}{2},\frac{\xi}{2}\right)=O\big(\psi(\delta,\xi_1,\xi)\big)$
3. $\frac{\delta}{\delta+\xi_1}\varphi(\xi_1,\xi)=O\big(\psi(\delta,\xi_1,\xi)\big),$

где постоянные в "O" отношениях не зависят от δ,ξ_1,ξ.

По определению $(\varphi,\psi)\in G_0H_P$, если $(\varphi,\psi)\in G_0$ и

$$\left(\varphi\left(\xi_1,\frac{l_1}{2},\xi\right),\psi\left(\delta,\xi_1,\frac{l_1}{2},\xi\right)\right),\left(\varphi\left(\frac{l_1}{2},\xi_1,\xi\right),\psi\left(\delta,\frac{l_1}{2},\xi_1,\xi\right)\right)\in H_p\left(0<\xi,\xi_1\le\frac{l_1}{2}\right).$$

Теорема 4. Пусть $(\varphi,\psi)\in G_0H_p$. Тогда оператор $\tilde{u}$ действует в $H^p_{\varphi\psi}$ и ограничен.

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 3 и определения класса G_0H_P.

References:

1. Abdullaev, S.K., & Babaev, A.A. (1969). Nekotorye svojstva osobogo integrala. *Dokl.AN. CCCR*,188, 2.
2. Abdullaev, S.K., & Babaev, A.A. (1978). *Ob osobom integrale s summiruemoj plotnost`u. Funkcional`nyj analiz i ego prilozhenie.* Baku “Jelm”.
3. Babaev, A.A. (1966). Nekotorye svojstva osobogo integrala s nepreryvnoj plotnost`u i ego prilozhenija. *Dokl. AN SSSR*, 170, 5.
4. Bari, I.K., & Stechkin, S.B. (1956). *Trudy Moskovskogo matem. Obshhestva*, 5.
5. Gusejnov, E.G., & Salaev, V.V. (1979). Osobyj integral po otrezku prjamoj v prostranstvah summiruemyh funkcij. *Nauch.Tr.MV i SSO Azerb.SSR, ser. fiz.-mat. nauk*, 1, 81-87.
6. Zhak, I.E. (1952). O soprjazhennyh dvojnyh trigonometricheskih rjadah. *Matem. sb.* t.31 (73), 3, 469-48.
7. Luzin, N.N. (1927). *Integral i trigonometricheskij rjad*. 6.
8. Salaev, V.V. (1966). Nekotorye svojstva osobogo integrala. *“Uchenye zapiski” AGU ser. fiz,mat. nauk.*, 6.
9. Hardi, G.G., Littl`vud, D.E., & Polia, G. (1948). *Neravenstva*. Moscow: Izd.I.L.
10. Hvedelidze, B.V. (1975). *Sovremennye problemy matematiki*. (p.7). Moscow.
11. Holmurodov, Je. (1978). Nekotorye ocenki dlja osobogo integrala s lokal`no summiruemoj plotnost`u, *Uch.zap.MV i SSO Azerb.SSR, serija fiz-mat. nauk*, 6, 71-80.
12. Bony-Jean-Michel (1982). Resolution des conjectures de Calderon et espaces de Hardy generalizes (d apres R. Coifmon, G. David, A.Mclntosh, Y. Meyer) “*Asterisque*”, 92-93, 293-300.
13. Calderon, A. P. (1977). Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proc. Nat. Acad.Sci USA*, 74, 4.
14. Calderon, A.P. , Calderon, C. P., Fabes, E., Jodeit, M., & Riviere, N. M. (1978). Bull. Amer. Math. Soc. 84, 2
15. Cesari, L. (1938). Sulle cerie di Fourier della fanzlonl Lipshitziane de piu variable, Ann. *Schola. Norm. Sup.Piza* (2) 7, 279-295.
16. Fefferman, R. (1988). weights and singular integrals. *Amer.J.Math.-M.*, 110, 5, pp. 975-987.
17. Riesz, M. (1927). Surles functions conjugue'es. *Math.Z.*, 27, 2.
18. Absalamov, T., & Fayzullayeva, B. (2020). Bisingular Integral In The Space Of Summable Functions. *The American Journal of Applied Sciences,* 2(08), 21-30.
19. Absalamov, T. (2020). Some estimates for bisingular integral with locally summable density. *ISJ Theoretical and Applied Science*, 07 (87), 201-208.