

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
Year: 2025 Issue: 05 Volume: 145
Received: 08.05.2025
Accepted/Published: 30.05.2025 <https://T-Science.org>



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecture to Department of Theoretical and Applied Mechanics
xudoyberdiyevz@mail.ru

Rashid Sharafovich Usanov
Samarkand State University of Veterinary Medicine
Animal Husbandry and Biotechnology,
Teacher of the Department of Information Technologies and Natural Sciences

Nozima Shodiqulovna Rahmatullayeva
Finnish Pedagogical Institute of Uzbekistan
Teacher

Dilshodbek Abduraxmon ugli Ismoilov
Samarkand State University
student

SOLVING THE SYMMETRIC VIBRATION EQUATIONS OF A THREE-LAYER PLATE USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Abstract: The article presents a theoretical investigation of the symmetric longitudinal vibrations of a three-layered plate. During the modeling process, the plate is considered as a three-dimensional deformable body. The equations of motion are derived based on the main components of displacement occurring along the mid-surface of the plate. The resulting vibration equations were solved numerically using analytical methods, and the mechanical meaning of the solutions was interpreted. Based on the results obtained, significant scientific conclusions were drawn regarding the dynamic properties of the plate.

Key words: element, solutions, result, layer, oscillations, algorithm.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z.B., Usanov, R.Sh., Rahmatullayeva, N.Sh., & Ismoilov, D.A. (2025). Solving the symmetric vibration equations of a three-layer plate using the finite difference method. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (145), 62-65.

Soi: <https://s-o-i.org/1.1/TAS-05-145-13> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.05.145.13>

Scopus ASCC: 2200.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Аннотация: В статье теоретически исследован процесс симметричных продольных колебаний трехслойной пластины. В процессе моделирования пластина рассматривается как трехмерное деформируемое тело. Уравнения движения основаны на главных компонентах перемещений, происходящих вдоль срединной поверхности пластины. Полученные уравнения колебаний были решены численно с использованием аналитических методов и объяснен механический смысл решений. На основании результатов были сделаны важные научные выводы относительно динамических свойств пластины.

Ключевые слова: элемент, решение, результат, слой, колебания, алгоритм.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Введение

Трехслойные пластины — это конструктивные элементы, широко используемые во многих отраслях промышленности, особенно в строительстве, аэрокосмической и автомобильной промышленности. Эти пластины используются в качестве основных элементов сложных механических конструкций благодаря своей прочности, долговечности и разнообразным механическим свойствам. Динамические расчеты также важны при анализе вибрационных характеристик пластин и других конструкций. Эти расчеты обычно описываются на основе гипотез Кирхгофа, которые позволяют наиболее просто и эффективно моделировать такие конструкции, как пластины и оболочки. Проводится большой объем научных исследований и разработок по трехслойным пластинам, направленных на улучшение динамики материалов и конструкций. Наиболее важными исследованиями и теориями в этой области, несомненно, являются научные труды С.Г.Лехнихтского, С.А.Амбарцумяна, Г.И.Петрашен и многие другие выдающиеся ученые, внесшие значительный вклад в развитие классических теорий и разработку новых методов. Их работу можно разделить на два основных направления: асимптотические теории и теория Тимошенко-Рейсснера. В то время как асимптотические методы используются для анализа упрощенных форм конструкций, теория Тимошенко-Рейсснера позволяет проводить более глубокий анализ инерционных и деформационных свойств пластин. Вычислительная теория трехслойных пластин и конструкций на основе метода точного решения, разработанная Г.И. Петрашен, в свою очередь, предложил новые подходы в этой области.

Профессор И.Г.Филиппов и его ученики применили этот точный метод решения в своей работе и разработали уравнения колебаний двухслойных и трехслойных пластин и оболочек. Однако в их работе имелись некоторые недостатки и ограничения. В некоторых случаях их расчеты были подвержены следующим ограничениям:

Рассматривались только трехслойные пластины с симметричной структурой. Эти ограничения приводят к отсутствию моделей с антисимметричными структурами.

Смещения точек на произвольной поверхности среднего слоя принимаются в качестве неизвестных. В этом подходе всего шесть неизвестных, что является не только математическим упрощением, но и вносит неопределенности в физику и механику. Если граничные условия заданы явно, число неизвестных увеличивается до двенадцати. Это, вместо повышения точности, усложняет систему.

Следует отметить, что в настоящее время трехслойные пластины и их вибрационные свойства изучены недостаточно глубоко. В этой области все еще продолжают проводиться многочисленные научные исследования. Разрабатывая новые подходы и методы, можно будет более точно и эффективно определять механические свойства этих конструкций.

Постановка задачи

Рассмотрим трехслойную прямоугольную составную пластину. Пластина закреплена сжатием с двух противоположных сторон. Рассматриваемая трехслойная пластина является трехмерным телом. Вводим декартову систему координат $Oxyz$ для пластины. Ось Ox направляем вдоль длины пластины, ось Oy вдоль ширины пластины, а ось Oz вдоль толщины пластины.

Предположим, что эта трехслойная пластина, симметричная относительно плоскости Oxy , находится в состоянии плоской деформации.

Для трехслойной изотропной упругой пластины мы получаем соотношение между напряжениями и деформациями в слоях пластины в виде закона Гука.

$$\sigma_{ii}^{(m)} = \lambda_m \varepsilon_{ii}^{(m)} + 2\mu_m \varepsilon_{ii}^{(m)}; \sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu_m \varepsilon_{ij}^{(m)}. \quad (1)$$

Уравнения движения для точек слоев трехслойной пластины записываются следующим образом.

$$\sigma_{ij,j}^{(m)} = \rho_m \ddot{\vec{U}}^{(m)} \quad (2)$$

где $\vec{U}^{(m)}$ — векторы смещения точек слоев трехслойной пластины; t — время. φ_m — скалярных и $\vec{\psi}_m$ векторные потенциальные функции вводятся через вектор смещения следующим образом:

$$\vec{U}^{(m)} = \text{grad} \varphi_m + \text{rot} \vec{\psi}_m \quad (3)$$

Векторный потенциал $\vec{\psi}_m$ в данном случае удовлетворяет условию соленоидности.

$$\text{div} \vec{\psi}_m = 0 \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) в систему (2), несложно получить уравнения движения точек слоев трехслойной пластины в виде волновых уравнений для продольного потенциала φ_m и поперечного волнового потенциала $\vec{\psi}_m$.

В случае плоской деформации векторы смещения точек трехслойной пластины имеют только две компоненты: U_m и W_m .

С учетом того, что в случае плоской деформации векторы перемещений точек слоев выражаются только через орты $\vec{i}$ и $\vec{k}$, уравнения движения приводятся к следующим волновым уравнениям.

$$\Delta \varphi_m = \ddot{\varphi}_m / a_m^2; \Delta \psi_m = \ddot{\psi}_m / b_m^2, \quad (5)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Здесь a_m – скорость распространения поперечных волн в слоях трёхслойной пластины;

b_m – скорость распространения продольных волн в слоях трёхслойной пластины; Δ – оператор Лапласа.

При этом компоненты вектора смещений точек слоёв трёхслойной пластины выражаются через потенциальные функции φ и ψ_m . Точно так же компоненты тензоров деформаций и напряжений записываются через эти потенциалы.

Для момента времени $t < 0$ предполагается, что трёхслойная пластина находится в состоянии покоя. Начиная с момента $t = 0$, на её поверхность начинают воздействовать динамические нагрузки. Поскольку задача является линейной, перемещения можно представить как сумму симметричной и антисимметричной составляющих:

$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a,$$

где $\vec{U}_m^s$ – симметричная (продольная) компонента перемещений, $\vec{U}_m^a$ – антисимметричная (изгибная) составляющая.

Симметричные компоненты перемещений должны удовлетворять следующим граничным условиям: $z = (-1)^{i-1} h_i^*$, $h_i^* = h_0 + h_i$

$$\sigma_{xz}^{(i)} = f_x^{(i)}; \sigma_{zz}^{(i)} = f_z^{(i)}; (i = 1, 2). \quad (6)$$

Дополнительно, на границе между слоями пластины (при $z = h_0$) должны выполняться следующие условия согласования динамического и кинематического характера:

$$\sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}, U_0 = U_1, W_0 = W_1. \quad (7)$$

Начальные условия предполагаются нулевыми, то есть перемещения и скорости в начальный момент времени отсутствуют.

Метод решения

Для нахождения решения задачи необходимо задать аналитические выражения для функций $f_x^{(0,1)}(x, t)$ и $f_z^{(0,1)}(x, t)$ входящих в граничные условия. С этой целью внешние нагрузки представим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} f_x^{(0,1)} &= \int_0^\infty \frac{\cos kx}{\sin kx} dk \int_{(l)} \tilde{f}_x^{(0,1)} e^{pt} dp \\ f_z^{(0,1)} &= \int_0^\infty \frac{\sin kx}{-\cos kx} dk \int_{(l)} \tilde{f}_z^{(0,1)} e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь $f_x^{(0,1)}, f_z^{(0,1)}$ – регулярные при $Re p \geq 0$ функции, обладающие конечным числом особых точек (полюсов), произвольно заданные в некоторой области Ω , охватывающей отрезок $(-i\omega_0; i\omega_0)$ на мнимой оси. Эти функции убывают при $p \rightarrow i\infty$ не медленнее, чем $|p|^{-n_0}$, где $n_0 \gg 1$, и вне области Ω принимают пренебрежимо малые значения. Аналогично, функции $\tilde{f}_x^{(0,1)}$ и $\tilde{f}_z^{(0,1)}$

являются аналитическими на интервале $(0, k_0)$, стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, со скоростью не менее k^{-n_0} , и могут быть пренебрежимы при $k > k_0$. Контур интегрирования (l) – расположен в комплексной плоскости (p) вдоль линии $Re p = \nu > 0$ при этом область Ω остаётся правее этого контура.

С учётом ранее введённых представлений для функций внешнего воздействия, решение задачи также будем искать в форме, аналогичной выражению (4). Такой подход даёт возможность преобразовать систему (5) в набор обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В случае симметричных нагрузок, вызывающих продольные колебания в слоях пластины и оболочки, общее решение этих уравнений принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) &= A_m^1 ch(\alpha_m z) \\ \tilde{\psi}_m(z, k, p) &= B_m^1 sh(\beta_m z) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + p^2/a_m^2; \beta_m^2 = k^2 + p^2/b_m^2.$$

Величины перемещений U_m и W_m также будем представлять в форме, аналогичной выражению (8). Подставив их вместе с функциями из (9) в общие выражения для перемещений, получим преобразованные формы $\tilde{U}_m$ и $\tilde{W}_m$ в виде гиперболических функций с включёнными интеграционными постоянными.

Затем, применяя стандартное разложение гиперболических функций в степенные ряды, перейдём к следующему этапу анализа:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} [k \alpha_m^{2n} A_m^{(1)} - \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)}] \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \tilde{W}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_m^{2n+2} A_m^{(1)} - k \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)}] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В качестве искоемых величин в уравнениях, описывающих колебания трёхслойной пластины, примем главные компоненты преобразованных перемещений для поверхностного слоя с номером $\tilde{U}_0$ и $\tilde{W}_0$ (нулевого слоя), где поверхность определяется условием $z = 0$, а расстояние от неё задаётся следующим выражением:

$$\xi = \chi \cdot h_0; -1 \leq \chi < 0; 0 \leq \chi < 1$$

Здесь

χ – заданная постоянная, удовлетворяющая условию $-1 \leq \chi \leq 1$. Для получения конкретных формул, в выражениях (10) принимаем $z = \xi$, $m = 0$ и $n = 0$. Вводя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$, получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_0^{(0)} &= k A_0^{(1)} - \beta_0 B_0^{(1)} \\ \tilde{W}_0^{(0)} &= [\alpha_0^2 A_0^{(1)} - k \beta_0 B_0^{(1)}] \xi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решив систему уравнений относительно величин $A_0^{(1)}$ и $\beta_0 B_0^{(1)}$, выразим их через $\tilde{U}_0^{(0)}$ и

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$\tilde{W}_0^{(0)}$. Из условий контакта (7) получаем выражения для постоянных $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ при $m = 1, 2$. Эти постоянные затем подставляются в граничные условия (6). Такой подход позволяет привести уравнения симметричных колебаний трёхслойной пластины к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} \right] + B_1 \left[U_0^{(0)} \right] &= S_1 [f_x^{(1)}]; \\ A_2 \left[W_0^{(0)} \right] + B_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right] &= S_2 [f_z^{(2)}], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где A_k, B_k, S_k — дифференциальные операторы одинаковой структуры, имеющие вид

$$D_k = D_{k1} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + D_{k2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + D_{k3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{k4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{k5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{k6}$$

D_{kj} равны A_{kj}, B_{kj} или S_{kj} :

$$\dots, A_{26} = 1 - q_2, \dots, B_{26} = -\xi(1 + q_2);$$

где $i = 1, 2; z_1 = h_0 + h_1; z_2 = h_0 + h_2;$

$q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}; a_m, b_m$ — обозначают

соответствующие скорости продольных и

поперечных волн в материале трёхслойной пластины.

В аналогичной форме формулируется уравнение колебаний для трёхслойной оболочки конической формы.

$$\left. \begin{aligned} C_1 \left[W_0^{(0)} \right] + D_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right] &= K_1 [f_x^{(1)}]; \\ C_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} \right] + D_2 \left[U_0^{(0)} \right] &= K_2 [f_z^{(2)}], \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решив данную систему уравнений, можно определить напряжённо-деформированное состояние в трёхслойных пластинах и оболочках.

Для проверки корректности полученных результатов они были сопоставлены с данными, представленными в работах других исследователей. С этой целью исходную систему уравнений приводили к форме, соответствующей уравнениям для однослойной пластины и оболочки. В результате были получены выражения, совпадающие с классическими уравнениями, выведенными в рамках традиционной теории.

References:

1. Grigoluk, Je.I., & Selezov, I.T. (1973). Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek. *Itogi nauki i tehniki*. Ser. Mehanika deform. tverdyh tel, T. 5. (272p.). Moscow: VINITI.
2. Hudojnazarov, H. H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie cilindricheskikh obolochek i sterzhnej s deformiruemoy sredoj*. (325p.). T. Izd-vo med.lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
3. Aleksandrov, A.Ja., & Kurshin, L.M. (1968). *Trehslujnye plastinki i obolochki. Prochnost', ustojchivost', kolebanija*. (pp.245-308). Moscow: Mashinostroenie, 1968, t.2.
4. Petrashen', G.I. (1966). Problemy inzhenernoj teorii kolebanij vyrozhdennyh sistem. *Iss-ja uprugosti i plastichnosti*. L.: Izd-vo LGU, 1966 - №5, pp. 3-33.
5. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1968). Ob inzhenernyh uravnenijah kolebanij neideal'no-uprugih plastin. *Trudy MIAN*. T. 95, L.: Nauka, 1968, pp. 151 - 183.
6. Filippov, I.G. (1986). Utochnenie differencial'nyh uravnenij kolebanija vjaskouprugih plastin i sterzhnej. *Prikl.meh*, 1986, 22, №2, pp. 71-78.
7. Mirzakobilov, N.H. (1992). *Kolebanija trehslojnyh plastin chastnogo vida*. Diss. na sois. uch. st. kand. nauk. (139p.). Moskva.
8. Filippov, I.G., & Cheban, V.G. (1988). *Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vajaskouprugih plastin i sterzhnej*. (188p.). Kishinev: «Shtiinca».
9. Hudojnazarov, H.H., & Filippov, I.G. (1990). Utochnenie differencial'nyh uravnenij prodol'no - radial'nyh kolebanij krugovoj cilindricheskoj vjaskouprugoj obolochki. *Prikl. meh*, 1990, 26, №2, pp. 63 - 71.
10. Khudoynazarov, Kh., Abdirashidov, A., & Burkutboyev, Sh.M. (2016). Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody - *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2016, no.1, pp. 38-51.
11. Khudoynazarovm Kh.Kh., & Burkutboyevm Sh.M. (2017). Mathematical modelling of torsional vibrations of cylindrical shell taking into account of flowing fluid and rotation - *Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2017, no.4, pp. 31-47.
12. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1971). Ob uslovijah primenimosti inzhenernyh uravnenij neideal'no-uprugih plastin. *Voprosy dinamiki teorii rasprostraneniya sejsmicheskoy volny*. № 11, Moscow: Nauka, 1971, pp. 48-56.