

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.191
 ESJI (KZ) = 8.100
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 05 Volume: 145

Received: 14.05.2025

Accepted/Published: 30.05.2025 <https://T-Science.org>

Issue

Article



Sobir Jo'raqulovich Sobirov
 Bukhara State Technical University
 Department of "Exact Sciences"
 Bukhara, Republic of Uzbekistan,
s.sobirov1977@gmail.com

LINEAR OSCILLATIONS OF A SPHERICAL BODY IN A DEFORMABLE MEDIUM

Abstract: The paper examines the oscillations of spherical bodies located in a deformable medium. The problem is reduced to finding those values $\Omega = \Omega_{Rn} + i\Omega_{In}$ (Ω_{Rn} - real and Ω_{In} - imaginary parts of complex natural frequencies), for which the system of equations of motion and truncated radiation conditions have a non-zero solution in the case of infinitely differentiable functions. It is shown that the problem has a discrete spectrum located on the lower complex plane $\text{Im}\Omega \leq 0$ and the symmetric spectrum is the imaginary axis.

Key words: vibrations, spherical body, environment, frequency, energy loss.

Language: Russian

Citation: Sobirov, S.J. (2025). Linear oscillations of a spherical body in a deformable medium. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (145), 99-106.

Soi: <https://s-o-i.org/1.1/TAS-05-145-21> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.05.145.21>

Scopus ASCC: 2200.

ЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА В ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Аннотация: В работе рассматриваются колебания сферических тел, находящихся в деформируемой среде. Задача сводится к нахождению тех значений $\Omega = \Omega_{Rn} + i\Omega_{In}$ (Ω_{Rn} - вещественная и Ω_{In} - мнимая части комплексных собственных частот), при которых система уравнений движения и укороченные условия излучения имеют ненулевое решение в класс бесконечно дифференцируемых функций. Показано что задача имеет дискретный спектр, расположенный на нижней комплексной плоскости $\text{Im}\Omega \leq 0$ и симметричный спектр является мнимой оси.

Ключевые слова: колебания, сферическое тело, среда, частота, потеря энергии.

Введение

В последние годы внимание геофизиков всё больше привлекают неоднородности недр Земли. Этот интерес объясняется тем, что изучение неоднородностей проливает свет на геодинамические процессы, происходящие в коре и верхней мантии, проясняет некоторые проблемы геологической эволюции Земли. Таким образом, задачи, связанные с идентификацией неоднородностей, с определением их размеров и физических характеристик представляются весьма важными и актуальными. Хотя для этих целей геофизиками используются такие разные

подходы как гравиразведка, электромагнитные методы, изучение электропроводимости и т.п., сейсмический метод является, возможно, самым прямым и при интерпретации даёт наименее сомнительные результаты. Всесторонний анализ проблем сейсмической макродефектоскопии необходим для решения столь важных в практическом отношении задач, как исследование земного ядра [1], поиск магматических очагов вулканов [2], рудных тел [3] и т.д. В последнее время интенсивно проводятся экспериментальные работы по распространению ультразвуковых волн в статических моделях упругих сред, содержащих

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

инородные включения и трещиноватые зоны [4]. Идеальное упругое тело не имеет потерь [12,13]. Даже если уравнение линейно относительно напряжения и деформации, наличие временных производных всегда связано с диссипацией. В результате, при переменном напряжении возникает эффект гистерезиса. Это означает, что в диапазоне частот, в котором затухание имеет заметную величину, деформация отстанет от напряжения. Наличие только нелинейной связи между напряжением и деформацией (без временных производных в уравнении) вызывает два эффекта. Такая связь, во-первых, приводит к взаимодействию рассматриваемой упругой волны с другими волнами (например, с тепловыми колебаниями) и в результате происходит перераспределение энергии между волнами. Во-вторых, рассматриваемая волна будет генерировать более высокие гармоники, передавая им свою энергию. В обоих случаях взаимодействие зависит от амплитуды деформации.

Нелинейная связь между напряжением и деформацией при наличии временных производных также приводит к затуханию, зависящему от амплитуды деформации.

Кроме того, изучение неоднородностей представляет большой интерес для исследования важного тектонофизического явления - поведения очага готовящегося землетрясения. Сейчас среди сейсмологов широко принято представление о зоне подготовки сейсмических толчков, как области с изменяющимися в результате тектонических движений

упругоплотностными характеристиками. С механической точки зрения это соответствует неоднородности с незначительно изменёнными относительно внешней упругой среды скоростями продольной и поперечной волн, а также, возможно, плотностью. Любая неоднородность вместе с вмещающей её средой должна обладать, как всякая упругая механическая система, некоторым спектром собственных частот. Поскольку колебания включения и вмещающей среды взаимосвязаны, будет иметь место затухание колебаний вследствие излучения упругих волн и, следовательно, собственные частоты будут комплексны. Поэтому для практических целей идентификации возможных резонансных пиков на спектральной кривой и установления их связи с соответствующими неоднородностями очень важно знать собственные частоты колебаний упругих включений в бесконечной упругой среде [7]. С физической точки зрения затухание в идеальной упругой среде объясняется излучением энергии возбужденных собственными колебаниями за счет расходящихся упругих волн. Исследовано поведение комплексных собственных частот в зависимости от

геометрических и физико-механических параметров системы. Окружающая среда сферических тел рассматривается как упругая, вязкоупругая и многокомпонентная. Интерес к исследованию собственных частот системы упругое включение - среда обусловлен ещё и следующим обстоятельством. При просвечивании неоднородности сейсмическими волнами либо от слабых землетрясений, либо от импульсных искусственных источников типа пневмоизлучателей задачу рассеяния необходимо решать в нестационарной постановке. Такое тело характеризуется линейной однозначной связью между напряжением и деформацией в течение всего периода переменного напряжения. Отсюда следуют, что напряжение и деформация всегда находятся в фазе. Диссипация энергии упругой волны будет происходить в том случае, если напряжение и деформация не связаны однозначной зависимостью в течение периода колебаний. Отсутствие такой однозначной зависимости между напряжением и деформацией возникает, когда в уравнении, связывающем их, появляются временные производные. Как известно, в этом случае для расчёта волнового поля стационарное решение следует проинтегрировать по частоте вместе со спектром заданного падающего импульса. Получающийся при этом интеграл можно, вообще говоря, вычислять каким-либо прямым численным способом. В некоторых случаях, однако, предпочтение следует отдать методу интегрирования с помощью теории вычетов в виде разложения по полюсам подынтегральной функции, т.к. именно этот метод может выявить ряд полезных физических особенностей процесса дифракции. Заметим, что интересующие нас полюса совпадают с корнями уравнения собственных частот и, таким образом, для того, чтобы в дальнейшем иметь возможность заниматься задачами нестационарной дифракции упругих волн, необходимо тщательное изучение поведения корней частотных уравнений в зависимости от соотношения упругоплотностных параметров среды и включения. В данной статье рассматриваются колебания сферических тел, находящихся в деформируемой среде [10,11]. Сравниваются полученные многочисленные результаты на ЭВМ. Кусочно-однородная механическая система рассматривается как диссипативно однородная и неоднородная.

Исследование механизмов потерь энергии в упругих сферических телах в упругой среде.

Для объяснения механизмов потерь энергии рассмотрим частную задачу о прохождении волн большой длины в упругой среде, содержащей малую объемную долю жестких сферических

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

включений. Обобщенное перемещение для волнового движения в упругой среде можно записать в сферических координатах для гармонической периодической волны с угловой

частотой ω в виде $\vec{U} = \vec{U}_0 e^{i\omega t}$ где $\vec{U}_0$ - функция только пространственных координат, которая может быть представлена в виде [6]

$$\vec{U}_0 = -\nabla\varphi + \nabla \times [\nabla \times (r\psi)]$$

Потенциалы φ и ψ удовлетворяют уравнениям

$$(\nabla^2 + \alpha_c^2)\varphi = 0, \quad (\nabla^2 + \beta_c^2)\psi = 0 \quad (1)$$

где $\alpha_c = \omega(\frac{\rho}{\lambda + 2M})^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda_e}$, $\beta_c = \omega(\frac{\rho}{M})^{1/2} = \frac{2\pi}{\lambda_t}$,

λ_e и λ_t -соответственно длины продольных и поперечных волн.

Падающая продольная волна определяется так

$$P_{n-1/2}(\cos\theta) = (2/\pi \sin\theta)^{1/2} [\cos(n\Delta - \pi/4) + \frac{ctg\theta}{8n} \sin(n\theta - \pi/4) + \theta(1/n^2)].$$

Коэффициенты A_n и B_n должны быть определены из граничных условий на поверхности жесткой сферы, т.е. из требования непрерывности перемещений:

$$U_r = U(t) \cos\theta; U_\theta = U(t) \sin\theta, \quad (4)$$

где $U(t)$ – перемещение среды. Напряжение на поверхности сферы должно быть связано с уравнением ее движения следующим образом:

$$\rho_0 \pi a^3 \frac{d^2 U}{dt^2} = 1,5\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos\theta - \sigma_{r\theta} \sin\theta) \sin\theta d\theta, \quad (5)$$

где a – радиус и ρ_n – плотность сферического выключения. Перемещение сферы рассматриваемой задач должно быть гармоническим:

$$U(t) = Ue^{i\omega t}.$$

При условии большой длины волны (1), (2) и (3) действующая внешняя сила выражается следующим образом:

$$F(w) = -\frac{\rho_m V_0}{\tau_0^2} \left\{ \frac{9[V(w) - U(w)]}{2x^2 + 1} \left(1 - ia \frac{2x^3 + 1}{2x^2 + 1} \right) - a^2 f_1 V(w) + a^2 f_2 V(w) \right\},$$

где ρ_m – плотность окружающей частицу упругой среды; V_0 – объем включения; $V(\xi)$ – движение включения; ξ – некоторое постоянное число

$$f_1 = \frac{2 + 9x + x^2 + [18x^3(x+2)]/(2x^2+1)^2 - Q}{2x^2+1};$$

$$f_2 = \frac{4,5 + 9x + 3x^2 + 18x^3(x+2)/(2x^2+1)^2}{2x^2+1};$$

$$Q = 9x(x+1)(2x+1)/(2x^2+1);$$

$$x = \beta/\alpha = \mathcal{G}_t/\mathcal{G}_l; \quad \tau_0 = \alpha/\mathcal{G}_l.$$

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0 \exp \left[i\omega \left(\frac{x}{\mathcal{G}_l} - t \right) \right] \quad (2)$$

где φ_0 – амплитуда падающих волн; $\mathcal{G}_l$ – скорость распространения продольной волны; ω – частота. Выражение отраженной волны через потенциалы перемещений можно записать в виде

$$\varphi^{(r)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(\alpha r) P_n(\cos\theta); \quad (3)$$

$$\psi^{(r)} = \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} B_n h_n(\beta r) P_n(\cos\theta);$$

$$\alpha^2 = \omega^2/\mathcal{G}_l^2, \beta^2 = \omega^2/\mathcal{G}_t^2.$$

Здесь $\mathcal{G}_t$ – скорость сдвиговой волны; $h_n(\alpha r)$, $h_n(\beta r)$ – сферические функции Бесселя; $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра, A_n и B_n коэффициенты. При вычислениях функции Лежандра $n \gg 1$ использовались асимптотические формулы из работы [7,8]

Теперь обратимся к случаю $\rho_b \gg \rho_m$, т.е. когда плотность материала включения намного больше плотности окружающей среды. При этом условия последними двумя членами можно пренебречь

$$F(w) = -\frac{9\rho_m V_0}{\tau_0^2} - \frac{V(w) - U(w)}{2x^2 + 1} \left(1 - ia \frac{2x^3 + 1}{2x^2 + 1} \right). \quad (6)$$

Подставив (6) в уравнение движения (5) и записав результат через производные по времени, получим

$$\rho_0 \frac{d^2 V}{dt^2} + \frac{9\rho_m(2x^3+1)}{\tau_0(2x^2+1)^2} \left(\frac{dV}{dt} - \frac{dU}{dt} \right) + \frac{9\rho_m}{\tau_0^2(2x^2+1)} (V - U) = 0. \quad (7)$$

Последний член (7) характеризует упругую энергию, подобную энергии пружины, а скоростные члены описывают явление диссипации энергии из-за рассеяния энергии волн.

$$\eta = \frac{2\rho_m(2x^3+1)}{2\rho_b\tau_0(2x^2+1)};$$

$$\omega^2 = \frac{2\rho_m}{2\rho_b\tau_0(2x^2+1)}. \quad (8)$$

Первый член (8) характеризует коэффициент затухания, а второй – собственные частоты. Для определения затухания в первую очередь необходимо определить коэффициент рассеяния. Рассеяние есть отношение полной энергии, рассматриваемой за единицу времени, к энергии, переносимой падающей волной за единицу времени через единичную площадь, перпендикулярную направлению распространения [9]. Тогда выражение для сечения рассеяния дается

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

формулами, выражение для скорости рассеяния энергии можно представить в виде:

$$F_s = \frac{i\omega\pi a^2}{2} \int_0^\pi \left[(\sigma_{rr} U_{rr}^* + \sigma_{r0} U_0^* + \sigma_{rr} U_\varphi^*) - (\sigma_w^* U_r + \sigma_\alpha^* U_0 + \sigma_\varphi^* U_\varphi) \right] \sin \theta dt,$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{r0}, \sigma_{\theta\theta}, U_r, U_\varphi$ - соответственно, компоненты тензора напряжений и смещений. Затухание при рассеянии на взаимно независимых центрах равно

$$\alpha_\partial = \frac{1}{2} n_0 \gamma,$$

где n_0 -концентрация рассеивающих центров; γ -рассеяние для одиночного рассеивающего центра. Рассмотрим бесконечную изотропную упругую среду, в котором заключена упругая среда, из материала, отличающегося от окружающей среды. Среда и сфера находятся в состоянии периодического движения, причем далеко от сферы. Это движения представляет собой распространение монохроматической плоской продольной волны

$$l x p \left[i(\omega t - \vec{k} \vec{r}) \right].$$

В любой точке среды движения предполагается состоящим из суммы полей этой плоской продольной волны и поля сферических волн, обусловленных присутствием сферы. Эти волновые поля мы будем называть соответственно падающими и рассеянными волнами.

При рассмотрении движения упругой среды можно говорить о механической энергии, которая переносится распространяющейся волной. Коэффициент рассеяния выражает связь между энергиями падающих и рассеянных волн в сфере, содержащей рассеивающий центр. Таким образом, коэффициент рассеяния выражается через характеристики падающей и рассеянной волне. Падающая волна задается условиями движения и соответствующих граничных условий. Уравнение движения для смещения U в изотропной упругой среде имеет вид (1). Волна в среде, как уже отмечалось, представляет собой сумму падающей и рассеянной волн:

$$U_0 = U_i + U_s \quad (9)$$

где индексы i и s относятся соответственно к падающей и рассеянной волнам. Уравнения (1) и (9) линейны, поэтому для области вне сферы.

$$\psi_i = \varphi_i + \varphi_s; \quad \psi_s = \varphi_i + \varphi_s = \psi_s \quad (10)$$

$(\nabla^2 + K_1^2)\varphi_i = 0, \quad (\nabla^2 + K_1^2)\varphi_s = 0, \quad (\nabla^2 + H_1^2)\psi_s = 0,$ где индекс 1 относится к среде: ψ_i равно нулю, так как рассматривается чисто продольная волна. Внутри сферы

$$\varphi_2 = \varphi_q, \quad \psi_2 = \psi_q \quad (11)$$

$$(\nabla^2 + K_2^2)\varphi_q = 0, \quad (\nabla^2 + H_2^2)\psi_q = 0,$$

индекс 2 относится к материалу, из которого состоит сфера, а индекс q - к волне внутри сферы выражения отличаются множителем $(-i)^{m+1} a(2m+1)$ от выражений, использованных в (11). Множитель введен для того, чтобы коэффициенты A_m, B_m, C_m, D_m были безразмерными, а также для некоторого, упрощения последующих уравнений.

При выборе формы учитывалось что при больших r решение должно иметь вид простой гармонической и сферической волны. Запишем падающую волну в виде

$$U_i = e^{-iRZ} Z_1, \quad (12)$$

где Z_1 -единичный вектор в направлении распространения и $Z = r \cos \theta$.

Учитывая, что $U = -\nabla \varphi_i$, можно выразить

φ_i в форме

$$\varphi_i = (K_1)^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} (2m+1) J_m(K_1 r) P_m(\cos \theta)$$

В результате волна вне сферы представляется следующим образом:

$$\varphi = \psi_i + \psi_s \quad \psi = \psi_s$$

$$\varphi_i = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} (K_1)^{-1} (2m+1) J_m(K_1 r) P_m(\cos \theta) \quad (13)$$

$$\varphi_s = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} a(2m+1) A_m h_m(K_1 r) P_m(\cos \theta)$$

$$\psi_s = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} a(2m+1) B_m h_m(H_1 r) P_m(\cos \theta),$$

а для волны внутри сферы $\varphi = \varphi_q, \psi = \psi_q$;

$$\varphi_q = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} a(2m+1) C_m J_m(K_2 r) P_m(\cos \theta), \quad (14)$$

$$\psi_q = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^{m+1} a(2m+1) D_m j_m(H_2 r) P_m(\cos \theta)$$

Коэффициенты A_m, B_m, C_m и D_m должны быть определены из граничных условий (4). Выражение (13) и (14) можно использовать, рассчитав смещения и напряжения из потенциалов ψ и φ .

Из уравнения, имея в виду, что φ и ψ не зависит от φ , получаем

$$U_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \Omega \psi,$$

$$U_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} (r \psi)$$

$$U_\psi = 0$$

Здесь Ω - оператор, который имеют следующий вид

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}).$$

Напряжения в изотропной упругой среде в декартовых координатах равны

$$\sigma_{ij} = \lambda(\nabla \cdot S)\delta_{ij} + \mu(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}), \quad (15)$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i=j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Переходя к сферическим координатам и используя (15), получаем

$$\sigma_{rr} = \rho w^{-2} \left\{ \varphi + \frac{2}{H^2} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Omega \varphi - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \Omega \psi \right) \right] \right\} \quad (16)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -2 \frac{\rho w^2}{v^2 \partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{2\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{H^2 r^2}{2} \right) \psi + \frac{1}{r^2} \Omega \psi \right], \sigma_{\varphi\varphi} = 0$$

Для рассеянной волны φ и ψ выражаются уравнениями (6) и (16). Подставляя эти выражения в (14) и используя (16), получаем, что поток энергии рассеянной волны через сферическую поверхность радиусом, с большим, чем радиус центра рассеяния

$$F_s = 2\pi 01 w^2 a^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left[\frac{1}{k_1} |Am|^2 + \frac{m(m+1)}{H_1} |Bm|^2 \right].$$

Из (8) для сечения рассеяния получаем

$$\gamma = 4\pi a^2 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left[|Am|^2 + m(m+1) \frac{K_1}{H_1} |Bm|^2 \right].$$

Поскольку A_m и B_m безразмерные величины, коэффициент рассеяния имеет размерность площади, как и должен, быть по определению. Безразмерный коэффициент рассеяния имеет следующий вид

$$\gamma_N = \frac{\gamma}{\pi a^2}. \quad (17)$$

Таким образом, γ_N определяется как отношение потока полной энергии в рассеянной волне к потоку энергии в падающей волне и имеет следующий вид

$$\gamma_N = 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \left[|A_m|^2 + m(m+1) \frac{K_1}{H_1} |B_m|^2 \right]$$

Ниже приведен расчет этой величины для двух случаев: изотропная упругая сфера и сферическая полость в упругой среде.

Упругая сфера. Граничными условиями является непрерывность напряжений и смещений на границе, т.е. выполняется следующие соотношения:

$$\begin{aligned} U_{ri} + U_{rs} &= U_{rq}; \\ U_{\theta i} + U_{\theta s} &= U_{\theta q}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma_{rri} + \sigma_{rrs} = \sigma_{rrq}; \quad U_{\theta ri} + U_{\theta s} = U_{\theta q}.$$

Использование этих соотношений и уравнений (13), (14), (18) даёт следующие уравнения, линейные относительно A_{em} , B_{em} , C_{em} и D_{em} :

$$\begin{aligned} &A_{em}(K_1 a)h_m(K_1 a) + B_{em}M(H_1 a)h_m(H_1 a) - C_{em}(K_2 a)J_m(K_2 a) - \\ &- D_{em}M(H_2 a)J_m(H_2 a) = (-1)^m J_m(k, a). \\ &A_{em}h_m(K_1 a) - B_{em}[(m+1)h_m(H_1 a) - (H_1 a) - (H_1 a)h_m(H_1 a)] - C_{em}J_m(k_2 a) + \\ &+ D_{em}[(m+1)J_m(H_2 a) - H_2 a J_m(H_2 a)] = (-1)^m (k_1 a)^{-1} J_m(k_1 a) \\ &A_{em}[(H_1 a)^2 h_m(k_1 a) - 2(m+2)k_1 a h_{m+1}(k_1 a)] + \\ &+ B_{em}[(H_1 a)^2 h_m(H_1 a) - 2(m+2)H_1 a h_{m+1}(H_1 a)] - \\ &- C_{em}(\frac{\mu_2}{\mu_1})[(H_2 a)^2 J_m(k_2 a) - 2(m+2)k_2 a J_{m+1}(k_2 a)] - D_{em}(\frac{\mu_2}{\mu_1})m \cdot \\ &\cdot [(H_2 a)^2 J_m(H_2 a) - 2(m+2)H_2 a J_{m+1}(H_2 a)] = (-1)^m (k, a)^{-1} \\ &[(H_1 a)^2 J_m(k_1 a) - 2(m+2)(k_1 a)J_{m+1}(k_1 a)]; \\ &A_{em}[(m-1)h_m(k_1 a) - k_1 a h_{m+1}(k_1 a)] - \\ &- B_{em}[(m^2 - 1 - \frac{1}{2} H_1^2 a^2)h_m(H_1 a) + (H_1 a)h_{m+1}(H_1 a)] - \\ &- C_{em}(\frac{\mu_2}{\mu_1}) \cdot [(m-1)J_m(k_2 a) - (k_2 a)J_{m+1}(k_2 a)] + D_{em} \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \\ &\cdot [(m^2 - 1 - \frac{J}{2} H_2^2 a^2)J_m(H_2 a)J_{m+1}(H_2 a)] \\ &= (-1)^m (K_1 a)^{-1} [(m-1)J_m(k_1 a) - (k_1 a)J_{m+1}(k_1 a)]. \end{aligned}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Индекс ϵ обозначает коэффициенты, относящиеся к упругой сфере

Полагая $m=0$, из (19) находим

$$A_{k_0} = \frac{1}{k_1 a} \frac{[(H_1 a)^2 - (4 + E)] \sin K_1 a + (4 + E) k_1 a \cos k_1 a}{\left\{ [H_1 a^2 - (4 + E)]^2 + (4 + E)^2 (k_1 a)^2 \right\}^{1/2}} \exp \left\{ i \left[k_1 a - \arctg \frac{(H_1 a)^2 - (4 + E)}{(4 + E) k_1 a} \right] \right\},$$

где

$$E = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[\frac{(\chi - a)^2}{1 - k_2 \arctg k_2 a} - 4 \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} \right)^2 \right] \quad (20)$$

При $m > 0$ точное аналитическое решение системы уравнений (19) оказывается довольно сложным, и практически её лучше решать численно. Уравнения (19) в общем случае комплексны и эквиваленты системе восьми действительных линейных уравнений. Вводя обозначения

$$\begin{aligned} A_{em} &= X_1^{(m)} + i X_2^{(m)}; \\ B_{em} &= X_3^{(m)} + i X_4^{(m)}; \\ C_{em} &= X_5^{(m)} + i X_6^{(m)}; \\ D_{em} &= X_7^{(m)} + i X_8^{(m)}; \end{aligned}$$

где $X^{(m)}$ -действительные величины, можно переписать (19) в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \epsilon_{ij}^{(m)} X_j^{(m)} = \delta_i^{(m)}, \quad i=1,2,\dots,8, \quad (21)$$

где действительные матричные элементы ϵ_{ij} и δ_i имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(m)} &= -k_2 a j_{m+1}(k_2 a), \quad \epsilon_{12}^{(m)} = k_1 a H_{m+1}(k_1 a), \\ \epsilon_{13}^{(m)} &= m H_1 a j_{m+1}(H_1 a), \\ \epsilon_{14}^{(m)} &= m H_1 a h_{m+1}(H_1 a), \\ \epsilon_{15}^{(m)} &= -k_2 d j_{m+1}(k_2 a), \quad \epsilon_{16}^{(m)} = 0 \\ \epsilon_{17}^{(m)} &= -m H_2 d j_{m+1}(H_2 a), \quad \epsilon_{18}^{(m)} = 0 \\ \epsilon_{31}^{(m)} &= j_m(k_1 a), \quad \epsilon_{32}^{(m)} = H_m(k_1 a), \\ \epsilon_{33}^{(m)} &= -[(m+1)J_m(H_1 a) - H_1 a J_{m+1}(H_1 a)], \\ \epsilon_{34}^{(m)} &= [(m+1)J_m(H_1 a) - H_1 a J_{m+1}(H_1 a)], \\ \epsilon_{35}^{(m)} &= -j_m(k_2 a), \quad \epsilon_{36}^{(m)} = 0 \\ \epsilon_{37}^{(m)} &= (m+1)J_m(H_2 a) - H_2 a j_{m+1}(H_2 a), \\ \epsilon_{38}^{(m)} &= 0 \\ \epsilon_{51}^{(m)} &= (H_2 a)^2 j_m(k_1 a) - 2(m+2)k_1 a j_{m+1}(k_1 a), \\ \epsilon_{52}^{(m)} &= (H_1 a)^2 h_m(k_1 a) - 2(m+2)k_1 a h_{m+1}(k_1 a) \\ \epsilon_{53}^{(m)} &= m[(H_1 a)^2 j_m(H_1 a) - 2(m+2)H_1 a j_{m+1}(H_1 a)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{54}^{(m)} &= m[(H_1 a)^2 h_m(H_1 a) - 2(m+2)H_1 a h_{m+1}(H_1 a)], \\ \epsilon_{57}^{(m)} &= -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) [(H_2 a)^2 J_m(H_2 a) - 2(m+2)H_2 a J_{m+1}(H_2 a)], \quad \epsilon_{58}^{(m)} = 0; \\ \epsilon_{71}^{(m)} &= (m-1)J_m(K_1 \theta) - K_1 a J_{m+1}(K_1 a); \\ \epsilon_{72}^{(m)} &= (m-1)J_m(K_1 \theta) - K_1 a h_{m+1}(K_1 a); \\ \epsilon_{73}^{(m)} &= -\left[(m^2 - 1 - \frac{1}{2} H_1^2 a^2) J_m(H_1 a) + H_1 a J_{m+1}(H_1 a) \right]; \\ \epsilon_{74}^{(m)} &= -\left[(m^2 - 1 - \frac{1}{2} H_1^2 a^2) H_m(H_1 a) + H_1 a H_{m+1}(H_1 a) \right]; \\ \epsilon_{75}^{(m)} &= -\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) [(m-1)J_m(K_2 a) - K_2 a J_{m+1}(K_2 a)], \quad \epsilon_{76}^{(m)} = 0; \\ \epsilon_{2n,l}^{(m)} &= \begin{cases} -\epsilon_{2n-1,l+1}^{(m)} & l - \text{нечетное} \\ -\epsilon_{2n-1,l+1}^{(m)} & l - \text{четное} \end{cases} \\ \delta_i^{(m)} &= \begin{cases} (-1)^m (k_1 a)^{-1} \epsilon_{i,1}^{(m)} & l - \text{нечетное} \\ 0, & l - \text{четное} \end{cases} \end{aligned}$$

При $la \ll 1$ можно получить приближенное выражение для коэффициента рассеяния, пренебрегая членами более чем второго порядка по $k_1 a$ в разложении в ряд функции Бесселя и Ханкеля. Тогда

$$\gamma_N \approx \frac{4}{9} g e (k_1 a)^4, \quad (22)$$

где

$$g_e = \left\{ \frac{3(H_1/K_1)^2}{[3(H_2/K_2)^2 - 4](\mu_2/\mu_1) + 4} - 1 \right\}^2 + \frac{1}{3} \left[1 + 2 \left(\frac{H_1}{K_1} \right)^3 \right] \left[\left(\frac{H_2}{H_1} \right)^2 \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right]^2 + 40 \left[2 + 3 \left(\frac{H_1}{K_1} \right)^5 \right] \left\{ \frac{(\mu_2/\mu_1) - 1}{2[3(H_1/K_1)^2 + 2] \frac{\mu_2}{\mu_1} + 9(H_1/K_1)^2 - 4} \right\}$$

Выражение (22) является приближение формулы Рэлея.

Суммирование рядов. При расчете коэффициента рассеяния по формуле (14) суммирование проводится до тех пор, пока отношение текущего члена к текущей частной сумме не станут меньше 10^{-10} , сходимости ряда (14) приводится численные эксперименты.

При вычислении сечений рассеяния для упругой сферы и для сферической полости по формуле (22) рассчитывались и рэлевские приближение. Для $ka \ll 1$ выражение (22) должно давать тот же результат, что и эти приближения.

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	РИИЦ (Russia) = 0.191	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.100	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

Таблица 1. Ошибка определение частоты и коэффициентов демпфирования при различных чисел рядов.

Включения в среде	Ω	η	Ошибка, %	Число членов
Германий в алюминий	1.0	0,46321	1	4
	5.0	2,86653	0,5	11
	10.0	3,51241	0,5	16
Алюминий в германий	1.0	0,21235	1,8	4
	5.0	1,24673	0,7	11
	10.0	2,323573	0,5	16

Для комплексных корней метод Мюллера И. Бэрстоу упрощает вычисления и обеспечивает более быструю сходимость, чем метод Ньютона и Бэрстоу упрощает вычисления и обеспечивает более, если корни близки друг к другу. В таблице 1 приведены примеры ошибок, определенных по формуле и необходимых чисел членов ряда. Видно, что для вычисления коэффициент затухания и собственные частоты необходимо взять 11-16 членов ряда. В этом случае ошибка округления составляет до 1% ($\rho_m / \rho_0 = 0,02$; $\bar{C} = 0,5$; $a=1$; 2. $\rho_m / \rho_0 = 50$; $\bar{C} = 0,5$; $a=1$).

Основные выводы работы сводятся к следующему:

1. Построена теория и методы расчёта комплексных собственных частот колебаний упругой сферической неоднородности в упругой среде. Предложена постановка задачи собственные колебания цилиндрических тел находящихся в деформируемой среде. Задача сводится к нахождению тех $\Omega = \Omega_R + i\Omega_i$ (Ω_R - реальная и Ω_i - мнимые части

комплексных собственных частот), при которых система уравнений движения и укороченные условия излучения имеют ненулевое решение в классе бесконечно дифференцируемых функций. Показано что задача имеет дискретный спектр.

2. Выполнены детальные численные расчёты собственных частот и добротностей для радиальных и первых трёх номеров колебаний крутильного и сфероидального классов. Рассматривался случай, когда упругоплотностные характеристики включения и вмещающей среды различаются не слишком сильно.

3. Проведены расчёты дифференциального и полного сечений рассеяния для различных слабоконтрастных включений. Показано, что в области, близкой к направлению распространения падающей волны, рассеяние определяется в основном амплитудными функциями.

3. Полученные численные результаты для плоских механических систем в частном случае сравниваются с известными значениями. В коротких волнах ($h / \lambda > 0,5$) результаты отличаются до 10-15%, а в длинных волнах ($h / \lambda > 0,5$) до 25%

References:

1. Baz, A.I., Zeldovich, Ya.B., & Perelomov, A.M. (1971). *Scattering, reactions and decays in nonrelativistic quantum mechanics*. (544p.). Moscow: Nauka.
2. Guz, A.N., Kubenko, V.D., & Cherevko, Ivl.A. (1978). *Diffraction of elastic waves*. (308p.). Kiev: Naukova Dumka.
3. Jacob, D.K. (1979). *The Earth's Core*. (305p.). Moscow: Mir.
4. Dubrovsky, V.A. (1977). *Seismic vibrations of inclusions. in the book Problems of vibrational radiography of the Earth*. (pp.71-75). Moscow: Nauka.
5. Dubrovsky, V.A., & Morochnik, V.S. (1981). Natural oscillations of a spherical inhomogeneity in an elastic medium. *Izvestiya AN SSSR. Physics of the Earth*, 1981, No. 7, pp.29-41, 14.
6. Avliyakov, N.N., & Safarov, I.I. (2007). *Modern problems of statics and dynamics of underground turbine pipelines*. (306p.). Tashkent.
7. Bozorov, M.B., Safarov, I.I., & Shokin, Yu.I. (1966). *Numerical modeling of oscillations of dissipative homogeneous and inhomogeneous mechanical systems*. SB RAS, (188p.). Novosibirsk.

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИИ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

8. Safarov, I.I. (1992). *Oscillations and waves in dissipative-inhomogeneous media and structures*. (250p.). Tashkent, Fan.
9. Safarov, I.I., & Kaumov, S.S (2002). *Rasprostranenie i difrakcija voln v dissipativno - neodnorodnyh cilindricheskih deformiruemyh mehanicheskikh sistem*. (214p.). Tashkent: FAN.
10. Gontkevich, B.C. (1964). *Sobstvennye kolebanija obolochek i zhidkosti*. (103p.). Kiev. Nauk.dumka.