

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

**International Scientific Journal**  
**Theoretical & Applied Science**

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 05 Volume: 145

Received: 21.05.2025  
 Accepted/Published: 30.05.2025 <https://T-Science.org>

Issue

Article



**Asqar Khalilovich Zakirov**

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek  
 Associate Professor of the Department of Mechanics and  
 Mathematical Modeling, Tashkent, Uzbekistan  
[asqar\\_z@mail.ru](mailto:asqar_z@mail.ru)

## GAS FLOW IN A SUDDENLY EXPANDING PIPE AROUND A CONE

**Abstract:** In this article, we obtain an analytical solution to the problem of the flow of an ideal gas around a cone in a pipe with a sudden narrowing. A mathematical flow model is formulated, which is based on the Euler equations and the continuity equations for an ideal medium. Using jet theory methods, a solution to the problem in the upper half-plane relative to N.E. Zhukovsky's function is obtained. The equation of the free surface in parametric form is obtained. Graphs of the distribution of velocities and pressures on each segment of the boundary of the parametric half-plane are constructed.

**Key words:** jet, ideal fluid, sudden expansion, methods of the theory of analytical functions, complex velocity.

**Language:** Russian

**Citation:** Zakirov, A.Kh. (2025). Gas flow in a suddenly expanding pipe around a cone. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (145), 258-263.

**Soi:** <https://s-o-i.org/1.1/TAS-05-145-30> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.05.145.30>

**Scopus ASCC:** 2200.

### ОБТЕКАНИЕ КОНУСА ПОТОКОМ ГАЗА ВО ВНЕЗАПНО РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ ТРУБЕ

**Аннотация:** В данной статье получено аналитическое решение задачи обтекания конуса идеальным газом в трубе с внезапным сужением. Сформулирована математическая модель течения, в основу которой положены уравнения Эйлера и уравнения неразрывности идеальной среды. С использованием методов теории получено решение задачи в верхней полуплоскости относительно функции Н.Е. Жуковского. Получено уравнение свободной поверхности в параметрической форме. Построены графики распределения скоростей и давлений на каждом участке границы параметрической полуплоскости.

**Ключевые слова:** струя, идеальная жидкость, внезапное расширение, верхняя полуплоскость, теория аналитических функций, комплексная скорость.

### Введение

Бурное развитие традиционных и новых отраслей современного производства, в том числе гидроэнергетика, мелиорация и многие другие области, повысило интерес к теоретическому исследованию проблем течения сжимаемой жидкости во внезапно расширяющемся и сужающемся канале. Из экспериментальных и теоретических исследований известно, что при движении жидкости в диффузорах наблюдаются такие явления, как отрыв потока от поверхности, обратное течение и усиление турбулентности. Причем отрыв потока в диффузоре сильно зависит от его геометрии и параметров потока. Поток при

расширении является одним из наиболее распространенных примеров турбулентных потоков в инженерных расчетах. Например, диффузоры и конфузоры широко используются в различных технических и технологических устройствах, таких как трубопроводах, аэродинамических трубах и др.

В работах [1-3] изучены отрывные течения, которые имеют важное значение с точки зрения фундаментальной механики жидкости. В работе [4] исследовано разделение потока в осесимметричном расширяющемся диффузоре в зависимости от угла конусности. С использованием методов математического

**Impact Factor:**

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИНЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

моделирования и вычислительной математики, в [5] представлено численное моделирование ламинарных и турбулентных течений в канале при внезапном расширении. Изучено влияние геометрических размеров канала на характер течения и изменение гидродинамических параметров. В работе [6] рассматривается турбулентное течение в осесимметричном диффузоре с внезапным расширением. В таком потоке возникает сильная анизотропная турбулентность, и поскольку она считается очень сложной задачей для моделей турбулентности, эта проблема хорошо изучена экспериментально. В работе [7] исследуется турбулентное отрывное течение несжимаемого газа в окрестности, установленной в цилиндр пластины с дозвуковой скоростью. Для установившегося режима течения разработана модель, описывающая процесс втекания газа в цилиндр.

Актуальной является проблема дальнейшего совершенствования различных методов и алгоритмов исследования отрывных течений в областях со сложными конфигурациями. Для различных областей отрывного течения наиболее полная информация получается при решении системы дифференциальных уравнений движения. Но алгоритмы численного решения уравнений Навье - Стокса требуют больших вычислительных мощностей [8, 9].

Основной задачей при рассмотрении взаимодействия струи с различными твердыми преградами является определение силы давления струи на эти преграды. [Затвор](#) является частью [плотины](#), шлюза или иного гидротехнического сооружения, имеющий форму плоского клина, позволяющий перекрывать основной поток воды. Клин устанавливается на трубопроводе или канале и выполняет функцию открытия, закрытия или регулирования пропускной способности прохода. Модели с твердыми клиновыми затворами являются самыми простыми, но отлично подходят для управления турбулентными потоками. Клиновые задвижки используют в системах для транспортировки газов и жидкостей. Преимуществом клиновых задвижек является плавное перекрытие потоков, которое позволяет избежать гидравлических ударов.

Целью исследования является изучение взаимодействия струи, вытекающей из узкой

части трубы с твердой стенкой конической формы и осью, совпадающей с осью трубы.

Для осесимметричных задач при стационарном потенциальном течении системы уравнений движения сводятся к решению систем уравнений в частных производных [10-12]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V^2}{2} \right) = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{V^2}{2} \right) = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho r v)}{r \partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1)- (3) позволяет ввести непрерывные функции, потенциал скоростей  $\varphi(x, r)$  и функцию тока  $\psi(x, r)$ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, u = \frac{1}{r^k} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r}, v = -\frac{1}{r^k} \frac{\rho_1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

При  $k=0$  будем иметь плоское течение, а при  $k=1$  - осесимметричное. При

адиабатическом процессе  $p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n$  интеграл

Бернулли можно привести к виду [10-12]

$$p = p_0 \left( 1 - \tau \frac{V^2}{V_0^2} \right)^\gamma, \rho = \rho_0 \left( 1 - \tau \frac{V^2}{V_0^2} \right)^{\gamma+1}, \quad (5)$$

$$\text{где } \tau = \frac{V_0^2}{V_{\max}^2}, \gamma = \frac{1}{n-1}.$$

### Постановка задачи.

Рассматривается обтекание конуса потоком идеального сжимаемого газа в трубе с внезапным расширением. Пусть осесимметричный поток со свободной поверхностью набегаёт на конус, образующие которого наклонены к оси симметрии под углом  $\alpha\pi$ . За клином находится зона неподвижного газа, в которой давление постоянно. Предполагается, что течение установившееся, вихри и внешние силы отсутствуют, а процесс баротропический. Область течения схематично изображена на рис. 1.

На твердых границах внутри канала имеем граничное условие:  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ .

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
РИИЦ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

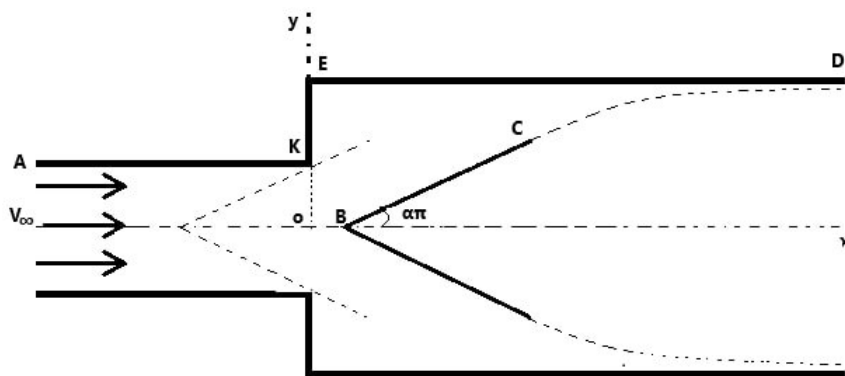


Рис. 1. Схематичное представление течения газа в канале.

### Метод решения.

Решение задачи строится в параметрической форме, причем в качестве канонической области взята верхняя полуплоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ . Область,

занятую движущимся газом, отобразим на область параметрического переменного ( $\zeta$ ). Соответствие точек границ областей ( $z$ ) и ( $\zeta$ ) показано на рисунках 1 и 2.

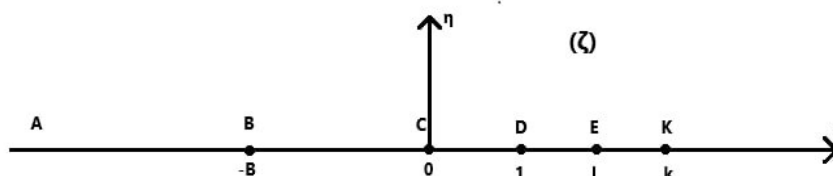


Рис. 2. Верхняя полуплоскость.

Для определения потока находим функцию скоростей  $\bar{V}(\zeta)$ . С помощью метода особых точек Чаплыгина строится функция комплексного потенциала [12, 16, 17]:

$$W(\zeta) = -\frac{q}{2^k \pi^{k+1}} \ln(\zeta - 1) + i \frac{q}{2^k \pi^k}. \quad (6)$$

Если твердые стенки, ограничивающие течение жидкости, состоят из прямых линий и отрезков прямых [12], то можно использовать метод Н.Е. Жуковского. Введем в рассмотрение функцию Н.Е. Жуковского

$$\omega = \ln \left( \frac{V_0 dz}{dW} \right) = \ln \left( \frac{V_0}{V} \right) + i\theta, \quad (7)$$

где  $\theta$  — угол, который составляет скорость с осью абсцисс  $x$ ,  $V_0$  — скорость на свободной поверхности.

Согласно методу Н.Е. Жуковского, функция  $\omega$  выражается через параметрическое переменное  $\zeta$ , изменяющееся в верхней полуплоскости.

Функция  $\omega(\zeta)$  на действительной оси верхней полуплоскости ( $\zeta$ ) удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{Im } \omega = 0, -\infty < \xi < -b, 1 < \xi < e, k < \xi < \infty;$$

$$\text{Im } \omega = \alpha\pi, -b < \xi < 0;$$

$$\text{Re } \omega = 0, 0 < \xi < 1;$$

$$\text{Im } \omega = \frac{\pi}{2}, e < \xi < k.$$

Введем функцию  $\omega_1(\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}$ . На границах действительной оси ( $\zeta$ ) функция  $\omega_1(\zeta)$  удовлетворяет условиям:

$$\text{Im } \omega_1 = 0, -\infty < \xi < -b, 1 < \xi < e, k < \xi < \infty;$$

$$\text{Im } \omega_1 = \frac{\alpha\pi}{\sqrt{\xi(1-\xi)}}, -b < \xi < 0; \quad (8)$$

$$\text{Im } \omega_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\xi(\xi-1)}}, e < \xi < k.$$

Таким образом, имеем краевую задачу (8) для определения аналитической функции  $\omega_1(\zeta)$  в верхней полуплоскости ( $\zeta$ ). Используя интегральную формулу Шварца найдем [12, 13]:

$$\omega_1(\zeta) = \alpha \int_{-b}^0 \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}} \frac{dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2} \int_e^k \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}} \frac{dt}{t-\zeta} \frac{1}{\pi}. \quad (9)$$

# Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.191  
 ESJI (KZ) = 8.100  
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

Интеграл (9) вычисляется путем замены переменной  $\frac{1}{t-\zeta} = s$ :

$$\omega(\zeta) = \ln \left[ \frac{\sqrt{b}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{b+1}}{\sqrt{b+\zeta}} \right]^{2\alpha} \frac{\sqrt{\zeta-k}(\sqrt{e}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{e-1})}{\sqrt{\zeta-e}(\sqrt{k}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{k-1})}. \quad (10)$$

Принимая во внимание (7), из последнего находим сопряженную комплексную скорость:

$$\bar{V} = V_0 \left[ \frac{\sqrt{b+\zeta}}{\sqrt{b}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{b+1}} \right]^{2\alpha} \frac{(\sqrt{k}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{k-1})\sqrt{\zeta-e}}{(\sqrt{e}\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta}\sqrt{e-1})\sqrt{\zeta-k}}. \quad (11)$$

$$u = V_0 F_3(\xi), v=0, 1 < \xi < e,$$

где

$$F_3(\xi) = \left[ \frac{\sqrt{b+\xi}}{\sqrt{b}\sqrt{\xi-1} + \sqrt{\xi}\sqrt{b+1}} \right]^{2\alpha} \frac{(\sqrt{k}\sqrt{\xi-1} + \sqrt{\xi}\sqrt{k-1})\sqrt{e-\xi}}{(\sqrt{e}\sqrt{\xi-1} + \sqrt{\xi}\sqrt{e-1})\sqrt{k-\xi}};$$

$$p = p_0 \left[ 1 - \tau_0 F_3^2(\xi) \right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

Скорость набегающего потока находим из (11) при  $\xi \rightarrow \infty$ :

$$V_A = V_0 \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}{\sqrt{e} + \sqrt{e-1}} \frac{1}{(\sqrt{b} + \sqrt{b+1})^{2\alpha}}.$$

Используем приближенный метод решения плоских и осесимметричных струйных задач сжимаемой жидкости (газа) с дозвуковой скоростью [14]. Квазиконформно отображающую функцию  $z = z(\zeta)$  находим из уравнений Бельтрами [14,15]

$$d\varphi + i \frac{d\psi}{\bar{p}} = \bar{p} \bar{V} (dx + i dr), \quad (12)$$

где  $\bar{p} = r^k \frac{\rho}{\rho_1}$  - характеристическая функция.

Функция комплексного потенциала  $W = \varphi + i\psi$  является р - аналитической функцией в области течения. Пользуясь формулами

Находим распределение продольной, радиальной скоростей и давлений на соответствующих границах верхней полуплоскости ( $\zeta$ ).

$$u = V_0 F_2(\xi) \cos(\alpha\pi), v = V_0 F_2(\xi) \sin(\alpha\pi), -b < \xi < 0,$$

где

$$F_2(\xi) = \left[ \frac{\sqrt{b-|\xi|}}{(\sqrt{b}\sqrt{|\xi|} + 1 + \sqrt{|\xi|}\sqrt{b+1})} \right]^{2\alpha} \frac{(\sqrt{k}\sqrt{|\xi|} + 1 + \sqrt{|\xi|}\sqrt{k-1})\sqrt{|\xi|+e}}{(\sqrt{e}\sqrt{|\xi|} + 1 + \sqrt{|\xi|}\sqrt{e-1})\sqrt{|\xi|+k}}.$$

$$p = p_0 \left[ 1 - \tau_0 F_2^2(\xi) \right]^{\frac{n}{n-1}}.$$

$$\bar{V} = u - i v = V_0 e^{-i\beta(\xi)}, u = V_0 \cos(\beta(\xi)), v = V_0 \sin(\beta(\xi)),$$

$$0 < \xi < 1,$$

где

$$\beta(\xi) = 2\alpha \arctg \frac{\sqrt{b}\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{b+1}\sqrt{\xi}} + \arctg \frac{\sqrt{e}\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{e-1}\sqrt{\xi}} - \arctg \frac{\sqrt{k}\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{k-1}\sqrt{\xi}};$$

$$p = p_0 \left[ 1 - \tau_0 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

$$x_\xi = \frac{\rho_1}{\rho r^k} \frac{u \varphi_\xi}{V^2}, r_\xi = \frac{\rho_1}{\rho r^k} \frac{v \varphi_\xi}{V^2}, \quad (13)$$

находим дифференциальное уравнение для граничных значений функции квазиконформного отображения верхней полуплоскости ( $\zeta$ ) на область течения ( $z$ ) вдоль действительной оси  $\xi$ :

$$-b < \xi < 0:$$

$$x_\xi = -\frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \frac{\rho_1}{\rho(\xi) r^k(\xi)} \frac{\cos(\alpha\pi)}{F_2(\xi)(\xi-1)}, \quad (14)$$

$$r_\xi = -\frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \frac{\rho_1}{\rho(\xi) r^k(\xi)} \frac{\sin(\alpha\pi)}{F_2(\xi)(\xi-1)};$$

$$0 < \xi < 1:$$

$$x_\xi = -\frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \frac{\rho_1}{\rho(\xi) r^k(\xi)} \frac{\cos \beta(\xi)}{\xi-1}, \quad (15)$$

$$r_\xi = -\frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \frac{\rho_1}{\rho(\xi) r^k(\xi)} \frac{\sin \beta(\xi)}{\xi-1}.$$

Интегрируя системы уравнений (15), находим форму свободной поверхности

## Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317  
ISI (Dubai, UAE) = 1.582  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
РИИЦ (Russia) = 0.191  
ESJI (KZ) = 8.100  
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

$$\begin{cases} x(\xi) = x(0) + \frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \int_0^\xi \frac{\rho_1}{\rho(t) r^k(t)} \frac{\cos \beta(t)}{1-t} dt, \\ r(\xi) = \left[ r^{k+1}(0) + \frac{q}{2^k \pi^{k+1} V_0} \int_0^\xi \frac{\rho_1}{\rho(t)} \frac{\sin \beta(t)}{1-t} dt \right]^{\frac{1}{k+1}} \end{cases} \quad (16)$$

### Результаты расчетов.

На рис. 3 и 4 изображены кривые для горизонтальной и вертикальной составляющих скорости для различных значений угла конусности  $\alpha$  вдоль границы ВС. На графике

кривые 1,2,3 соответствуют значениям  $\alpha = \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{11}{36}$ . Графики показывают, что с увеличением угла конусности вертикальная составляющая скорости ( $V$ ) увеличивается, а горизонтальная составляющая скорости ( $U$ ) уменьшается. На рис. 5 представлены графики распределения давления потока вдоль клина для значений  $\alpha = \frac{1}{6}; \frac{1}{4}$ .

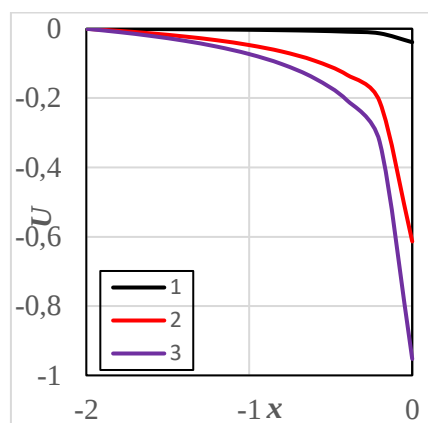


Рис. 3. Изменение горизонтальной скорости вдоль клина для различных значений  $\alpha$ .

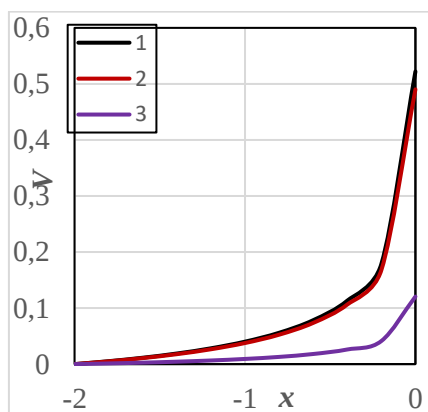


Рис. 4. Изменение вертикальной скорости вдоль клина для различных значений  $\alpha$ .

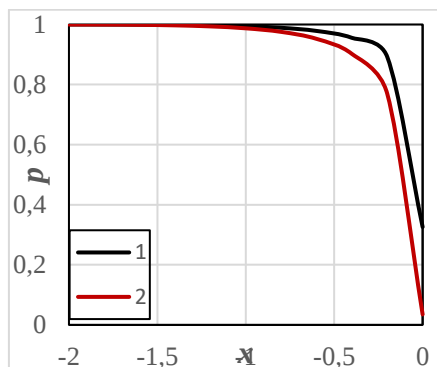


Рис. 5. Распределение давлений для различных значений  $\alpha$  вдоль границы ВС

|                       |                         |                |                       |                |                     |                |
|-----------------------|-------------------------|----------------|-----------------------|----------------|---------------------|----------------|
| <b>Impact Factor:</b> | <b>ISRA (India)</b>     | <b>= 6.317</b> | <b>SIS (USA)</b>      | <b>= 0.912</b> | <b>ICV (Poland)</b> | <b>= 6.630</b> |
|                       | <b>ISI (Dubai, UAE)</b> | <b>= 1.582</b> | <b>РИИЦ (Russia)</b>  | <b>= 0.191</b> | <b>PIF (India)</b>  | <b>= 1.940</b> |
|                       | <b>GIF (Australia)</b>  | <b>= 0.564</b> | <b>ESJI (KZ)</b>      | <b>= 8.100</b> | <b>IBI (India)</b>  | <b>= 4.260</b> |
|                       | <b>JIF</b>              | <b>= 1.500</b> | <b>SJIF (Morocco)</b> | <b>= 7.184</b> | <b>OAJI (USA)</b>   | <b>= 0.350</b> |

#### Закключение.

Результаты аналитического исследования обтекания клина идеального газа показали, что рассматриваемую модель можно использовать для

расчета гидродинамических параметров течения при струйном обтекании конических тел.

#### References:

1. Le, H., Moin, P., & Kim, J. (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step. - *J. Fluid Mech.*, vol. 330, pp. 349–374. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112096003941>
2. Durst, F., Melling, A., & Whitelaw, J. H. (1974). Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. - *J. Fluid Mech.*, vol. 64, no. 1, pp. 111–128. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112074002035>
3. Cherdron, W., Durst, F., & Whitelaw, J.H. (1978). *Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions*. - *J. Fluid Mech.*, vol. 84, iss. 1, pp. 13–31. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112078000026>
4. Chandavari, V., & Palekar, S. (2014). “Diffuser angle control to avoid flow separation,” *Int. J. Tech. Res. Appl.*, vol. 2, no. 5, pp. 16–21.
5. Karkhanov, S.A. (2009). *Direct numerical simulation of three-dimensional gas flows in a flat channel with abrupt expansion. Abstract of dissertation*. Izhevsk.
6. Dellenback, P.A., Metzger, D.E., & Neitzel, G.P. (1988). Measurements in Turbulent Swirling Flow Through an Abrupt Axisymmetric Expansion. - *AIAA JOURNAL*, Vol.26, No. 6, <https://doi.org/10.2514/3.9952>
7. Zakirov, A.Kh., Nazarov, F.Kh. (2023). Numerical Method for Calculating Plane Flowsof Viscous Gas in a Cylinder. *World of Transport and Transportation*, 2023, Vol. 21, Iss. 4 (107), pp. 152–157. DOI: <https://doi.org/10.932/1992-3252-2023-21-4-1>
8. Kalugin, V.T., & Sobolev, V.Yu. (2005). Mathematical modeling of subsonic turbulent flow processes around stabilizing devices of aircraft under flow separation conditions. *Bulletin of Bauman Moscow State Technical University*. Series: Mechanical Engineering, 2005, No. 2, pp. 20–30.
9. Timofeev, V.N. (2016). Construction of a semi-infinite equivalent body in mathematical modeling of subsonic separated axisymmetric flow. *Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2016, No. 4, pp. 67–83.
10. Loitsyansky, L.G. (1987). *Mechanics of liquid and gas*. (678p.). Moscow: Nauka.
11. Birkhoff, G., & Sarantonello, E. (1964). *Jets, Wake, and Caverns*. Edited by G.Yu. Stepanov. - M.: Mir.
12. Gurevich, M.I. (1979). *Theory of ideal fluid jets*. - Moscow: Nauka.
13. Lavrentiev, M.A., & Shabat, B.V. (1987). *Methods of the theory of functions of a complex variable*. - Moscow: Nauka.
14. Khamidov, A.A. (1978). *Plane and axisymmetric problems of jet flow of ideal compressible fluid*. Tashkent, Fan.
15. Polozhiy, G.N. (1973). *Theory and application of p-analytic and (P,Q)-analytic functions*. - Kyiv.
16. Zakirov, A.Kh. (2024). *Outflow of compressible fluid from a cylindrical nozzle*. IP Conf. Proc. 3119, 030006 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0215025>
17. Zakirov, A.Kh. (2023). Liquid outflow from converging-expanding nozzles. *Uzbek journal Problemy Mekhaniki*, 2023, No. 3, pp. 46-51.