

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИИ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2025 Issue: 05 Volume: 145

Received: 30.05.2025
Accepted/Published: 30.05.2025 <https://T-Science.org>



Yu.R. Krakhmaleva
M.H. Dulati Taraz University
Candidate of Technical Sciences
yuna_kr@mail.ru

S.T. Mukhambetzhano
U.A.Dzholdasbekov Institute of Mechanics and Machine Science
Almaty
saltanbek.kaznu@gmail.com

T. Tursynova
M.H. Dulati Taraz University
Master's student
Talshyn2595@gmail.com

FINDING A SOLUTION TO THE LYAPUNOV SYSTEM USING SMALL PARAMETER METHODS IN MAPLE

Abstract: The small parameter method has its own peculiarities in solving various problems. There are differences in the methods of constructing solutions for autonomous and non-autonomous systems, in the non-resonant case and near resonance, for quasi-linear systems and systems close to arbitrary nonlinear ones. In connection with the development of computer algebra, it is important to implement the small parameter method in the study of the motion of mechanical systems in modern mathematical packages, the dynamic development of which is currently being carried out successfully. The article describes a technique for finding solutions to the Duffing equation using the Poincare method and the Lyapunov method in the Maple environment.

Key words: Duffing equation, Poincare method, small parameter, Lyapunov method, Maple system.

Language: Russian

Citation: Krakhmaleva, Yu.R., Mukhambetzhano, S.T., & Tursynova, T. (2025). Finding a solution to the Lyapunov system using small parameter methods in Maple. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (145), 345-354.

Soi: <https://s-o-i.org/1.1/TAS-05-145-41> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2025.05.145.41>

Scopus ASCC: 2600.

НАХОЖДЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛЯПУНОВА МЕТОДАМИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА В СРЕДЕ MAPLE

Аннотация: Метод малого параметра имеет свои особенности при решении различных задач. Есть отличия в способах построения решений для автономных и неавтономных систем, в нерезонансном случае и вблизи резонанса, для квазилинейных систем и систем близких к произвольным нелинейным. В связи с развитием компьютерной алгебры важное значение имеет реализация метода малого параметра при исследовании движения механических систем в современных математических пакетах, динамическое развитие которых на современном этапе осуществляется успешно. В статье описывается методика нахождения решения уравнения Дюффинга методом Пуанкаре и методом Ляпунова в среде Maple.

Ключевые слова: уравнение Дюффинга, метод Пуанкаре, малый параметр, метод Ляпунова, система Maple

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 0.191
ESJI (KZ) = 8.100
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Введение

Задачи, решаемые с помощью метода малого параметра, бывают двух типов. Первый тип изначально включает в себя малый параметр естественным образом в виде, например, исходных физических параметров исследуемой системы с относительно небольшими значениями в рамках рассматриваемого подмножества области определения аргументов. Второй тип в исходной своей постановке такого параметра не содержит и его приходится вводить дополнительно для того, чтобы организовать процедуру нахождения решения по степеням этого параметра. Алгоритм введения параметра четко не определен, хотя часто предполагается, что такой параметр должен быть установлен у слагаемых с небольшими значениями относительно других членов.

При описании некоторой консервативной системы обращаются к уравнению Дюффинга. Уравнение описывает колебания с жесткой или мягкой нелинейностью:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x - \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (1)$$

где σ - коэффициент демпфирования; α и β являются параметрами линейной и нелинейной жесткости; $\gamma \cos(\omega t)$ - элемент внешней вынужденной силы.

Уравнение Дюффинга имеет более упрощенный вид:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3. \quad (2)$$

В этом случае уравнение (2) называют недемпфированным, невынужденным уравнением

Дюффинга. В (2) ε является параметром:

$\varepsilon \rightarrow 0$. Начальные условия уравнения (3.30):

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3)$$

Применим для решения задачи (2)–(3) метод Пуанкаре, предполагая, что решение уравнения представляет периодическую функцию.[1],[2] Решение уравнения находим в виде суммы по степеням малого параметра:

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots. \quad (4)$$

Выполним подстановку: (4) в (2), а затем составим выражения при различных степенях ε . В результате имеем (5):

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: \ddot{x}_0 + x_0 &= 0 & x_0(0) &= A, \\ & & \dot{x}_0(0) &= 0; \\ \varepsilon^1: & & x_1(0) &= 0, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= x_0^3 & \dot{x}_1(0) &= 0; \\ \varepsilon^2: \ddot{x}_1 + x_1 &= 3x_0^2 x_1 & x_2(0) &= 0, \\ & & \dot{x}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Решим первую задачу (5):

$$x_0 = A \cos t.$$

Подставим решение x_0 во 2-е уравнение (5):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= A^3 \cos^3 t, \\ \ddot{x}_1 + x_1 &= \frac{A^3}{4} (3 \cos t + \cos 3t). \end{aligned} \quad (6)$$

Решаем последнее уравнением и находим x_1 :

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t(A \cos t + B \sin t) + D \cos 3t. \quad (7)$$

При подстановке (7) в (6) имеем:

$$2(-A \sin t + B \cos t) - 8D \cos 3t = \frac{A^3}{4} (3 \cos t + \cos 3t). \quad (8)$$

Из (8) находим коэффициенты уравнения (7):

$$A = 0, \quad B = \frac{3A^3}{8}, \quad D = \frac{A^3}{32}.$$

Запишем общее решение x_1 :

$$x_1 = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{3A^3}{8} t \sin t - \frac{A^3}{32} \cos 3t. \quad (9)$$

Используем начальные условия задачи, тогда:

$$x_1(0) = C_1 - \frac{A^3}{32} \cos 3t,$$

откуда следует:

$$C_1 = \frac{A^3}{32},$$

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$\dot{x}_1(0) = C_2 = 0.$$

Таким образом, решение x_1 запишется в виде:

$$x_1 = \frac{3A^3}{8}t \sin t + \frac{A^3}{32}(\cos t - \cos 3t). \quad (10)$$

В решение уравнения (10)- функция x_1 входит слагаемое $t \sin t$, называемое вековым слагаемым, а значит, решение не является периодическим. Пришли к тому, что при нахождении решения в виде разложения ряда по степеням параметра ε получаем функцию, которая имеет разложение в ряд по функциям, не являющимися периодическими. Так как ставилась изначально задача нахождения решения уравнения в виде периодической функции, то не имеет смысла дальнейшее нахождение решения x_2 , которое будет содержать вековые слагаемые.

Рассмотрим решение уравнения Дюффинга методом Ляпунова.[3],[4] В силу того, что консервативная система выступает частным

случаем системы Ляпунова, то для ее исследования применяется метод Ляпунова.[5]-[7]

Выполним замену переменного $\tau = \omega t$, вследствие чего вводится новая функция $y(\tau)$ Функция $y(\tau)$ определяется следующим образом:

$$x(t) = x(t(\tau)) = y(\tau).$$

Задача Коши (2)-(3) в новых переменных имеет вид:

$$\omega^2 \frac{d^2 y}{d\tau^2} + y(\tau) = -\varepsilon y^3(\tau), \quad (10)$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = 0. \quad (11)$$

Решение $y(\tau)$ представим в виде суммы по степеням ε -малого параметра:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots \quad (12)$$

Аналогично, запишем ω в виде суммы по степеням ε -малого параметра:

$$\omega = 1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \quad (13)$$

Подставим в (12) и (13) в (10):

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots) + \\ & + (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots) = -\varepsilon (y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots)^3 \end{aligned} \quad (14)$$

Выпишем выражения из (14) при одинаковых степенях ε , имеем (15):

$\varepsilon^0: \ddot{y}_0 + y_0 = 0$	$y_0(0) = a, \quad y'_0(0) = 0;$
$\varepsilon^1:$ $y_0^3 + 2\ddot{y}_0 w_1 + \ddot{y}_1 + y_1 = 0$	$y_1(0) = 0, \quad y'_1(0) = 0;$
$\varepsilon^2: \ddot{y}_0 w_1^2 + 3y_0^2 y_1 + 2\ddot{y}_0^2 w_2 + 2\ddot{y}_1 w_1 + \ddot{y}_2 + y_2 = 0$	$y_2(0) = 0, \quad y'_2(0) = 0.$

Решая первую задачу (15), находим решение $y_0(\tau)$:

$$y_0(\tau) = a \cos \tau. \quad (16)$$

Подставляя решение $y_0(\tau)$ во вторую задачу (16), находим решение $y_1(\tau)$:

$$y_1(\tau) = -\frac{a}{8}(3a^2 - 8w_1)\tau \sin \tau + \frac{a^3}{8}\sin^2 \tau \cos \tau \quad (17)$$

В $y_1(\tau)$ присутствует вековое слагаемое $\tau \sin \tau$. Избавиться от этого слагаемого возможно, если положить $w_1 = -\frac{3a^2}{4}$ и в этом случае решение $y_1(\tau)$ запишется в виде:

$$y_1(\tau) = \frac{a^3}{8}\sin^2 \tau \cos \tau. \quad (18)$$

Применяя формулы тригонометрии:

$$\sin^2 \tau \cos \tau = \sin \tau \cdot \sin \tau \cdot \cos \tau = \frac{1}{2} \sin 2\tau \cdot \cos \tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2} \sin 3\tau \right) = \frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{4} \sin 3\tau,$$

решение $y_1(\tau)$ будет иметь запись:

$$y_1(\tau) = \frac{a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{4} \sin 3\tau \right) = \frac{a^3}{32} (\sin \tau + \sin 3\tau). \quad (19)$$

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

Как видим, решение $y_1(\tau)$ записано через периодические функции.

Подставляя решения $y_1(\tau)$ и $y_0(\tau)$ в третью задачу (15), находим решение для $y_2(\tau)$. Нахождение решения $y_1(\tau)$ сопровождалось вычислительными операциями, в первую очередь связанными представлениями $y(\tau)$ и ω в виде сумм степеней ε -малого параметра. Нахождение решения $y_2(\tau)$ аналогично будет сопровождаться большим количеством действий вычислительного характера. В связи с этим рассмотрим нахождение

решения задачи (10)-(11) в системе компьютерной математики, предварительно запишем решение $y(\tau)$ по уже известным $y_0(\tau)$ и $y_1(\tau)$:

$$y(\tau) = a \cos \tau - \varepsilon \cdot \frac{a^3}{32} (\sin \tau + \sin 3\tau) + \dots$$

Вычисления осуществляем в специализированном пакете *DETools*. Выполним решение задачи (2)-(3) по методу Пуанкаре. Вводим уравнение и начальные условия:

```
restart;
with(DETools);
eq1 := diff(x(t), t$2) = -x(t) + ε·x(t)3;
nus := x(0) = A, D(x)(0) = 0;
```

$$eq1 := \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -x(t) + \varepsilon x(t)^3$$

$$nus := x(0) = A, D(x)(0) = 0$$

Вводим решение уравнения в виде суммы по степеням ε -малого параметра:

$$x(t) := x0(t) + \varepsilon \cdot x1(t) + \varepsilon^2 \cdot x2(t);$$

$$x := t \rightarrow x0(t) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon^2 x2(t)$$

Подставим решение $x(t)$ в уравнение *eq1*, тем самым составим правую часть исходного уравнения, которую обозначим через *eq2*:

$$eq2 := -x0(t) - \varepsilon x1(t) - \varepsilon^2 x2(t) + \varepsilon (x0(t) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon^2 x2(t))^3$$

Составим уравнение *eq3*:

$$eq3 := \text{diff}(x0(t), t\$2) + \varepsilon \cdot \text{diff}(x1(t), t\$2) + \varepsilon^2 \cdot \text{diff}(x2(t), t\$2) = - (x0(t) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon^2 x2(t)) + \varepsilon (x0(t) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon^2 x2(t))^3;$$

$$eq3 := \frac{d^2}{dt^2} x0(t) + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) = -x0(t) - \varepsilon x1(t) - \varepsilon^2 x2(t) + \varepsilon (x0(t) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon^2 x2(t))^3$$

Используем функцию *isolate* для преобразования выражения *eq3* таким образом, чтобы в левой части содержались слагаемые, $eq4 := \text{isolate}(eq3, \varepsilon)$;

содержащие параметр ε , а в правой части слагаемые, не содержащие его. [9]-[10]

$$eq4 := -x2(t)^3 \varepsilon^7 - 3 x1(t) x2(t)^2 \varepsilon^6 - 3 x1(t)^2 x2(t) \varepsilon^5 - 3 x2(t)^2 x0(t) \varepsilon^5 - x1(t)^3 \varepsilon^4 - 6 x1(t) x2(t) x0(t) \varepsilon^4 - 3 x1(t)^2 x0(t) \varepsilon^3 - 3 x2(t) x0(t)^2 \varepsilon^3 - 3 x1(t) x0(t)^2 \varepsilon^2 - x0(t)^3 \varepsilon + \varepsilon^2 x2(t) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} x2(t) \right) + \varepsilon x1(t) + \varepsilon \left(\frac{d^2}{dt^2} x1(t) \right) = - \left(\frac{d^2}{dt^2} x0(t) \right) - x0(t)$$

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	РИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

Для дальнейшего решения необходимо собрать члены выражения по степеням малого параметра. Для этого используем команду

$eq5 := collect(eq4, \epsilon);$

$$eq5 := -x2(t)^3 \epsilon^7 - 3x1(t)x2(t)^2 \epsilon^6 + (-3x0(t)x2(t)^2 - 3x1(t)^2x2(t)) \epsilon^5 + (-6x0(t)x1(t)x2(t) - x1(t)^3) \epsilon^4 + (-3x0(t)^2x2(t) - 3x0(t)x1(t)^2) \epsilon^3 + (-3x0(t)^2x1(t) + x2(t) + \frac{d^2}{dt^2}x2(t)) \epsilon^2 + (-x0(t)^3 + x1(t) + \frac{d^2}{dt^2}x1(t)) \epsilon - \left(\frac{d^2}{dt^2}x0(t) \right) - x0(t)$$

Формируем уравнения для решений $x0$, $x1$, $x2$:

$$eq_0 := rhs(eq5) = 0; eq_1 := coeff(lhs(eq5), \epsilon) = 0; eq_2 := coeff(lhs(eq5), \epsilon^2) = 0;$$

$$eq_0 := -\left(\frac{d^2}{dt^2}x0(t) \right) - x0(t) = 0 \quad eq_1 := -x0(t)^3 + x1(t) + \frac{d^2}{dt^2}x1(t) = 0$$

$$eq_2 := -3x0(t)^2x1(t) + x2(t) + \frac{d^2}{dt^2}x2(t) = 0$$

Находим решения $x0$, $x1$, $x2$ с учетом начальных условий. Для $x0$:

$$dsolve(\{eq_0, x0(0) = A, D(x0)(0) = 0\}, x0(t)); assign(\%); x0(t);$$

$$x0(t) = A \cos(t)$$

Аналогично, составляются команды для нахождения $x1$ и $x2$:

$$dsolve(\{eq_1, x1(0) = 0, D(x1)(0) = 0\}, x1(t));$$

$$assign(expand(\%));$$

$$x1(t);$$

$$dsolve(\{eq_2, x2(0) = 0, D(x2)(0) = 0\}, x2(t));$$

$$assign(\%);$$

$$x2(t);$$

$$x1(t) = -\frac{1}{4}A^3 \cos(t) - \frac{1}{8}A^3 (\cos(t)^3 - 3 \sin(t)t - 3 \cos(t))$$

$$\frac{1}{8}A^3 \cos(t) - \frac{1}{8}A^3 \cos(t)^3 + \frac{3}{8}A^3 \sin(t)t$$

$$x2(t) = -\frac{13}{128}A^5 \cos(t) + \frac{1}{256}A^5 (4 \cos(t)^5 - 36 \cos(t)^2 \sin(t)t - 29 \cos(t)^3$$

$$- 18 \cos(t)t^2 + 33 \sin(t)t + 51 \cos(t))$$

$$- \frac{13}{128}A^5 \cos(t) + \frac{1}{256}A^5 (4 \cos(t)^5 - 36 \cos(t)^2 \sin(t)t - 29 \cos(t)^3 - 18 \cos(t)t^2$$

$$+ 33 \sin(t)t + 51 \cos(t))$$

Используем команду *eval* для нахождения решения исходной задачи:

$$X := eval(x(t));$$

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$X := A \cos(t) + \varepsilon \left(\frac{1}{8} A^3 \cos(t) - \frac{1}{8} A^3 \cos(t)^3 + \frac{3}{8} A^3 \sin(t) t \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{13}{128} A^5 \cos(t) + \frac{1}{256} A^5 (4 \cos(t)^5 - 36 \cos(t)^2 \sin(t) t - 29 \cos(t)^3 - 18 \cos(t) t^2 + 33 \sin(t) t + 51 \cos(t)) \right)$$

Нахождение $x2(t)$ не было сделано при решении задачи (2)-(3). В системе Maple это решение вычислено. Решение $x1(t)$ содержит вековое слагаемое $t \sin t$. В составе решения

$x2(t)$ присутствуют уже более одного вековых слагаемых.

Аналогично находим решение задачи (10)-(11) методом Ляпунова. Вводим уравнение и начальные условия:

```
restart;
with(DETools);
eq1 := w^2·diff(y(τ), τ$2) = -y(τ) + ε·y(τ)^3;
nus := y(0) = a, D(y)(0) = 0;
```

$$eq1 := w^2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) \right) = -y(\tau) + \varepsilon y(\tau)^3$$

$$nus := y(0) = a, D(y)(0) = 0$$

Решение $y(\tau)$ и ω представим в виде сумм по степеням ε -малого параметра:

$$y(\tau) := w0(\tau) + \varepsilon \cdot w1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot w2(\tau); \quad \omega := 1 + \varepsilon \cdot \omega1 + \varepsilon^2 \cdot \omega2;$$

$$y := \tau \rightarrow w0(\tau) + \varepsilon w1(\tau) + \varepsilon^2 w2(\tau)$$

$$\omega := \varepsilon^2 \omega2 + \varepsilon \omega1 + 1$$

Дополняем код командами для подстановки ω в выражения:

$$eq2 := -(w0(\tau) + \varepsilon \cdot w1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot w2(\tau)) + \varepsilon \cdot (w0(\tau) + \varepsilon \cdot w1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot w2(\tau))^3$$

$$eq3 := (1 + \varepsilon \cdot \omega1 + \varepsilon^2 \cdot \omega2) \cdot (diff(w0(\tau), \tau$2) + \varepsilon \cdot diff(w1(\tau), \tau$2) + \varepsilon^2 \cdot diff(w2(\tau), \tau$2)) - (w0(\tau) + \varepsilon \cdot w1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot w2(\tau)) + \varepsilon \cdot (w0(\tau) + \varepsilon \cdot w1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot w2(\tau))^3$$

$$eq2 := -w0(\tau) - \varepsilon w1(\tau) - \varepsilon^2 w2(\tau) + \varepsilon (w0(\tau) + \varepsilon w1(\tau) + \varepsilon^2 w2(\tau))^3$$

$$eq3 := (\varepsilon^2 \omega2 + \varepsilon \omega1 + 1) \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) + \varepsilon \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w1(\tau) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w2(\tau) \right) \right) = -w0(\tau) - \varepsilon w1(\tau) - \varepsilon^2 w2(\tau) + \varepsilon (w0(\tau) + \varepsilon w1(\tau) + \varepsilon^2 w2(\tau))^3$$

Используя функцию *isolate*, а затем команду *collect* без *;*, в конечном итоге имеем:

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$eq5 := -w2(\tau)^3 \varepsilon^7 - 3 wI(\tau) w2(\tau)^2 \varepsilon^6 + (-3 wI(\tau)^2 w2(\tau) - 3 w2(\tau)^2 w0(\tau)) \varepsilon^5 + \left(-wI(\tau)^3 - 6 wI(\tau) w2(\tau) w0(\tau) + \omega 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w2(\tau) \right) \right) \varepsilon^4 + \left(-3 wI(\tau)^2 w0(\tau) - 3 w2(\tau) w0(\tau)^2 + \omega I \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w2(\tau) \right) + \omega 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} wI(\tau) \right) \right) \varepsilon^3 + \left(-3 wI(\tau) w0(\tau)^2 + \omega I \left(\frac{d^2}{d\tau^2} wI(\tau) \right) + \omega 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right) + w2(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} w2(\tau) \right) \varepsilon^2 + \left(-w0(\tau)^3 + \omega I \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right) + wI(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} wI(\tau) \right) \varepsilon - w0(\tau) - \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right)$$

Формируем уравнения для нахождения решений $w0(\tau)$, $w1(\tau)$, $w2(\tau)$:

$$eq_0 := rhs(eq5) = 0; \quad eq_1 := coeff(lhs(eq5), \varepsilon) = 0; \quad eq_2 := coeff(lhs(eq5), \varepsilon^2) = 0;$$

$$eq_0 := -w0(\tau) - \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right) = 0$$

$$eq_1 := -w0(\tau)^3 + \omega I \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right) + wI(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} wI(\tau) = 0$$

$$eq_2 := -3 wI(\tau) w0(\tau)^2 + \omega I \left(\frac{d^2}{d\tau^2} wI(\tau) \right) + \omega 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w0(\tau) \right) + w2(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} w2(\tau) = 0$$

Находим решения $w0(\tau)$, $w1(\tau)$, $w2(\tau)$ с учетом начальных условий

```
dsolve({eq_0, w0(0) = a, D(w0)(0) = 0}, w0(\tau));
assign(%);
w0(\tau);
dsolve({eq_1, wI(0) = 0, D(wI)(0) = 0}, wI(\tau));
assign(%);
wI(\tau);
dsolve({eq_2, w2(0) = 0, D(w2)(0) = 0}, w2(\tau));
assign(%);
w2(\tau);
```

$$w0(\tau) = a \cos(\tau)$$

$$wI(\tau) = \left(-\frac{1}{4} a^3 - \frac{1}{2} a \omega I \right) \cos(\tau) + \frac{3}{8} a \left(-\frac{1}{3} a^2 \cos(\tau)^3 + \left(\frac{4}{3} \omega I + a^2 \right) \cos(\tau) + \sin(\tau) \left(\frac{4}{3} \omega I + a^2 \right) \tau \right)$$

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$w2(\tau) = \left(-\frac{13}{128} a^5 + \frac{7}{32} \omega l a^3 + \frac{3}{8} a \omega l^2 - \frac{1}{2} a \omega 2 \right) \cos(\tau) - \frac{9}{128} a \left(-\frac{2}{9} \cos(\tau)^5 a^4 \right. \\ \left. + \frac{29}{18} \cos(\tau)^3 a^4 + 2 \sin(\tau) \left(\frac{4}{3} \omega l + a^2 \right) a^2 \tau \cos(\tau)^2 + \left(\tau^2 - \frac{17}{6} \right) a^4 \right. \\ \left. + \left(\frac{8}{3} \omega l \tau^2 + \frac{28}{9} \omega l \right) a^2 + \frac{16}{3} \omega l^2 - \frac{64}{9} \omega 2 + \frac{16}{9} \omega l^2 \tau^2 \right) \cos(\tau) \\ \left. - \frac{11}{6} \sin(\tau) \left(a^4 - \frac{32}{33} a^2 \omega l - \frac{32}{11} \omega l^2 + \frac{128}{33} \omega 2 \right) \tau \right)$$

Решение $w0(\tau)$ является периодическим,
вводим обозначение для него $y0(\tau)$:

$$y0 := w0(\tau);$$

$$y0 := a \cos(\tau)$$

Решение $w1(\tau)$ при $w_1 = -\frac{3a^2}{4}$ является
периодической функцией, тогда :

$$y1 := \text{simplify}(w1(\tau)); \quad y1_1 := \text{subs}\left(\omega l = -\frac{3 \cdot a^2}{4}, y1\right);$$

$$y1 := \frac{1}{8} a \sin(\tau) \left(\sin(\tau) a^2 \cos(\tau) + 3 a^2 \tau + 4 \omega l \tau \right)$$

$$y1_1 := \frac{1}{8} a^3 \sin(\tau)^2 \cos(\tau) \cdot$$

Это решение с использованием
тригонометрических формул, как показано выше
примет вид:

$$y1(\tau) = \frac{a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{4} \sin 3\tau \right).$$

Решение $w2(\tau)$ при $w_2 = -\frac{21a^4}{256}$ является
периодической функцией:

$$y2 := \text{simplify}(w2(\tau)); \quad y2_2 := \text{subs}\left(\omega 2 = -\frac{21 \cdot a^4}{256}, y2\right);$$

$$y2 := \frac{1}{256} a \left(4 \cos(\tau)^5 a^4 - 36 \cos(\tau)^2 a^4 \sin(\tau) \tau - 29 \cos(\tau)^3 a^4 \right. \\ \left. - 48 \cos(\tau)^2 a^2 \sin(\tau) \omega l \tau - 18 \cos(\tau) a^4 \tau^2 - 48 \cos(\tau) \omega l a^2 \tau^2 + 33 a^4 \sin(\tau) \tau \right. \\ \left. + 25 a^4 \cos(\tau) - 32 \cos(\tau) \omega l^2 \tau^2 - 32 \omega l \sin(\tau) a^2 \tau - 96 \sin(\tau) \omega l^2 \tau \right. \\ \left. + 128 \sin(\tau) \omega 2 \tau \right)$$

$$y2_2 := \frac{1}{256} a^5 \sin(\tau)^2 \cos(\tau) \left(4 \cos(\tau)^2 - 25 \right) \cdot$$

Применяя тригонометрические формулы:

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

$$\begin{aligned}\sin^2 \tau \cdot \cos \tau \cdot \cos^2 \tau &= \frac{1}{4} \sin^2 2\tau \cdot \sin \tau \cdot \cos \tau = \frac{1}{4} \sin 2\tau \cdot \cos \tau \cdot \sin 2\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2} \sin 3\tau \right) \cdot \sin 2\tau = \\ &= \frac{1}{8} \sin \tau \cdot \sin 2\tau + \frac{1}{8} \sin 3\tau \cdot \sin 2\tau = \frac{1}{16} \cos(-\tau) - \frac{1}{16} \cos 3\tau + \frac{1}{16} \cos \tau - \frac{1}{16} \cos 5\tau = \\ &= \frac{1}{8} \cos \tau - \frac{1}{16} \cos 3\tau - \frac{1}{16} \cos 5\tau\end{aligned}$$

и

$$\sin^2 \tau \cos \tau = \sin \tau \cdot \sin \tau \cdot \cos \tau = \frac{1}{2} \sin 2\tau \cdot \cos \tau = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2} \sin 3\tau \right) = \frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{4} \sin 3\tau$$

решение $y_2(\tau)$ будет иметь вид:

$$y_2(\tau) = \frac{a^5}{256} \left(\frac{1}{8} \cos \tau - \frac{1}{16} \cos 3\tau - \frac{1}{16} \cos 5\tau - \frac{25}{4} \sin \tau + \frac{25}{4} \sin 3\tau \right)$$

При этом нужно отметить, что то решение ввиду рутинных вычислительных действий не было вычислено при решении задачи (10)-(11).

Решение задачи Коши (10)-(11) имеет вид:

$$Y := a \cos(\tau) + \frac{1}{8} a^3 \sin(\tau)^2 \cos(\tau) + \frac{1}{256} a^5 \sin(\tau)^2 \cos(\tau) (4 \cos(\tau)^2 - 25) .$$

С учетом применения тригонометрических формул решение уравнения примет следующий вид:

$$\begin{aligned}y(\tau) &= a \cos \tau + \varepsilon \frac{a^3}{8} \left(\frac{1}{4} \sin \tau + \frac{1}{4} \sin 3\tau \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{a^5}{256} \left(\frac{1}{8} \cos \tau - \frac{1}{16} \cos 3\tau - \frac{1}{16} \cos 5\tau - \frac{25}{4} \sin \tau + \frac{25}{4} \sin 3\tau \right)\end{aligned}$$

Это решение является периодической функцией. Таким образом, рассмотрено нахождение решения дифференциального уравнения 2 - го порядка методами Пуанкаре и методом Ляпунова в среде Maple , которое

возможно рассматривать в виде методики для исследования систем Ляпунова малого параметра. Простота алгоритма, скорость вычислительных операций и минимизация временных затрат являются достоинствами реализованной методики в системе компьютерной математики.

References:

1. Puankare, A. (1977). *Izbrannye trudy v 3-h tomah.* (771p.). Moscow: Nauka.
2. Puankare, A. (1971). *Izbrannye trudy: V treh tomah / t I: Novye metody nebesnoj mehaniki.* (771p.). M.: Nauka.
3. Ljapunov, A.M. (1958). *O figurah ravnovesija malo otlichaushhihsja ot jellipsoidov, vrashhaushhejsja odnorodnoj zhidkosti. Sbornik sochinenij.* (646p.). Moscow: Izd. AN SSSR, 1958. T4.
4. Ljapunov, A.M. (1959). *O forme nebesnyh tel. Sbornik sochinenij.* (pp.207-236). Moscow: Izd. AN SSSR, 1959. T3.
5. Malkin, I.G. (2020). *Nekotorye zadachi nelinejnyh kolebanij.* (494p.). Moscow: Nauka.
6. Bogolubov, N.N. (1974). *Asimptoticheskie metody nelinejnyh mehaniki.* (408p.). Moscow: Nauka.
7. Moiseev, N.N. (1969). *Asimptoticheskie metody nelinejnoj mehaniki.* - Moskva : Nauka.

Impact Factor:	ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
	ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	PIIHQ (Russia)	= 0.191	PIF (India)	= 1.940
	GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.100	IBI (India)	= 4.260
	JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

8. D`jakonov, V.P. (2017). *«Maple 9.5 10 v matematike, fizike i obrazovanii»*. (720p.). Moskva: SOLON-PRESS.
9. Kirsanov, M.N. (2020). *Matematika i programmirovaniye v Maple: uchebnoe posobie*. (164p.). Moskva: Aj Pi Ar Media.
10. Govoruhin, V.N., & Cibulin, V.G. (1997). *Vvedenie v Maple. Matematicheskij paket dlja vseh*. (208p.). Moscow: Mir.