SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2026 **Issue:** 09 **Volume:** 161

Received: 24.09.2026
Accepted/Published: 30.09.2026 https://T-Science.org

Issue Article

Amon Musurmonovich Shukurov
Karshi State University
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Applied mathematics,
Karshi, Republic of Uzbekistan
shukurovamon@yandex.ru

Ma'mura Oman qizi Musurmonova
Shakhrisabz State Pedagogical Institute
Senior Lecturer to Department of Mathematics
and Information Technology in Education,
dotsent, Shakhrisabz, Republic of Uzbekistan

Abdulla Uyg'un o'g'li Jabbarov
Karshi State University
PhD student to Department of Applied mathematics,
Karshi, Republic of Uzbekistan

Gulzoda Shukur qizi Muhiddinova
Karshi International University
Senior Lecturer to Department of Economics and Engineering,
assistant, Karshi, Republic of Uzbekistan

Xumoyun Oman o'g'li Musurmonov
Karshi State Technical University
master's student to Department of Oil
and Gas Engineering and Processing Technologies,
Karshi, Republic of Uzbekistan

NON-STATIONARY OSCILLATIONS OF A POROELASTIC HALF-SPACE WITH A HARD SPHERE

Abstract: *This paper examines the problem of unsteady oscillations of a fluid-saturated poroelastic half-space with an absolutely hard sphere. Specifically, it investigates the non-stationary oscillations of a kerosene-saturated sandstone half-space induced by the unsteady rotation of a hard sphere about an axis that passes through the sphere's center and is perpendicular to the half-space's plane boundary. Various parametric analyses were conducted for the region surrounding the hard sphere and on its surface. The research findings have potential applications in geophysics, seismology, structural engineering, and the design of underground reservoirs.*

Key words: *Non-steady rotation, hard sphere, stress, displacement, Gegenbauer polynomials, Laplace transform, residues, non-steady oscillation, poroelastic medium.*

Language: *Russian*

Citation: Shukurov, A.M., et al. (2026). Non-stationary oscillations of a poroelastic half-space with a hard sphere. *ISJ Theoretical & Applied Science, 09 (161),* 49-57.

Soi: https://s-o-i.org/1.1/TAS-09-161-8 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2026.09.161.8

Scopus ASCC: *2611.*

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОРИСТО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМ ШАРОМ

Аннотация: *В работе рассматривается задача о нестационарных колебаниях пористо-упругого полупространства, насыщенного жидкостью с абсолютно жестким шаром. Изучены поперечные колебания полупространства песчаника, насыщенного керосином при нестационарном вращении жесткой сферы вокруг оси, перпендикулярной плоской границе полупространства и проходящей через ее центр. Проведены различные параметрические исследования в окрестности жесткой сферы и на поверхности ее. Результаты исследования могут быть использованы в области геофизики, сейсмологии и проектных организаций при строительстве сооружений, а также при проектировании подземных резервуаров.*

Ключевые слова: *нестационарное вращение, жесткая сфера, напряжение, смещение, полиномы Гегенбауэра, преобразование Лапласа, вычеты, нестационарное колебание, пористо-упругая среда.*

1. Введение.

Математическое моделирование и исследование процессов нестационарных колебаний сплошных сред с различными неоднородностями (оболочка, полость, жесткий шар) имеют большое теоретическое и практическое значение в таких областях науки и техники, как геофизика, геология, сейсморазведка полезных ископаемых, сейсмостойкость сооружений и многие другие. Актуальность таких проблем обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, а также проблемами геофизики, сейсмологии, газоразведки, нефтеразведки, добывающей промышленности, строительства гражданских и промышленных сооружений.

В настоящее время существует большое количество научных работ, посвященных исследованию распространения и дифракции волн в сплошных средах. В [1] рассмотрено исследование распространения волн системе из толстостенной упругой сферической оболочки, заполненной идеальной жидкостью и упругой среды. Движения упругой среды и оболочки описывается уравнениями теории линейной упругости, а линейная теория идеальной жидкости использована для сжимаемых жидкостей. Рассмотрены примеры для различных материальных и геометрических конфигураций при воздействии источников возбуждения различного происхождения. В работе [2] рассмотрен метод, на основе вариационного подхода для исследования дисперсии волн в анизотропных двукриволинейных нанооболочках. Введена новая теория деформации сдвига для изучения нанооболочек. Уравнения двукриволинейных нанооболочек определены из принципа Гамильтона и решения их получены аналитическим методом. Работа [3] посвящена изучению задачи о дифракции цилиндрической поперечной сдвиговой волны в вязкоупругой изотропной среде со сферическим включением и решение ее построено аналитически. В радиальном центре цилиндра расположена сферическая неоднородность. Решение ищется в виде бесконечной суммы несобственных интегралов, которые определяются численно. В [4] изучена задача о рассеянии плоской акустической волны сжатия в жидкости от сферического пороупругого включения. Волновые процессы в пороупругом включении описывается уравнениями теории Био. В [5] рассмотрено исследование нестационарных поперечных волновых процессов в пространстве пористо-упругой среды со сферической полостью. На основе численных экспериментов, проведенных для касательных нагрузок, приложенных к поверхности полости, исследованы напряженно-деформированное состояние пористо-упругого пространства в окрестности сферической полости.

В статье [6] изучается осесимметричная задача распространения нестационарных волн из сферической полости в плоском акустическом слое. В пространстве изображений Лапласа задача сводится к решению бесконечного матричного уравнения, решение которого строится в виде бесконечного ряда по экспонентам. Численные результаты представлены в виде графиков изменения давления во времени в окрестности сферической полости.

В исследовании [7] рассматривается задача о взаимодействии плоской упругой волны с двумя сферическими неоднородностями в неограниченной пористой упругой среде, насыщенной жидкостью. Поведения пороупругого материала описывается уравнениями теории Био. Для разработки аналитического решения в виде бесконечных рядов использована теорема о сложении для сферических волновых функций. Публикация [8] посвящена исследованию волновых процессов в системе идеальной жидкости и упругого сферического слоя, расположенного в безграничном акустическом пространстве. Проведены численные исследования для различных нормальных приложенных к внутренней поверхности слоя нагрузок. В статье [9] изучена задача о нестационарные поперечные колебания упругого сферического слоя при действии касательных сил внутренней

поверхности слоя. Найдены формулы для компонент для характеристик напряжено-деформированного состояния упругого слоя. Статья [10] посвящена исследованию задачи о распространении пространственно-симметричных поперечных сдвиговых волн в упругом пространстве от толстостенной сферической оболочки. Используется интегральное преобразование Лапласа по безразмерному времени. Получены формулы для компонент вектора смещения и тензора напряжений в пространстве. Переход к оригиналам осуществляется с использованием теории вычетов. Проведены численные эксперименты. Осесимметричная задача о дифракции нестационарных волн изучена в публикации [11]. В качестве препятствия выбран абсолютно жесткий неподвижный шар в упругом полупространстве. Исследовано напряженно-деформированное состояние среды в окрестности шара. Распространение нестационарных волн сдвига от сферического включения в упругом полупространстве в [12]. Задача сведена к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, решение которой разыскивается в виде бесконечного ряда по экспонентам. Получены формулы для компонент вектора смещения и тензора напряжения. Статья [13] посвящена исследованию задаче о рассеянии плоских поперечных волн сферическим включением в бесконечной пороупругой среде. Используются волновые уравнения смещения теории Био, решение которых ищется в виде бесконечного ряда сферических гармоник.

В работе [14] представлены аналитические решения для динамического отклика обделенного тоннеля в слое грунта, покрытом композитной толщей, при воздействии SH-волн с использованием метода комплексных функций. Анализ рассеяния упругих волн в композитной толще представляет особую важность из-за наличия границ между слоями грунта. На примерах расчетов анализируется влияние на динамический отклик обделенного тоннеля в нескольких типах композитных толщ.

Данная работа посвящена математическому моделированию и изучению задачи о нестационарном колебании пористо-упругого полупространства, насыщенного жидкостью при нестационарном вращении абсолютно жесткого шара. Цель работы – разработка алгоритм решения задачи и исследование нестационарных поперечных волновых процессов при нестационарном вращении жесткого шара в насыщенном пористо-упругом полупространстве.

2. Постановка задачи.

Пусть в однородном линейном изотропном пористо-упругом полупространстве $z \geq 0$ на глубине l от плоскости $z = 0$ на оси $O_2 z$ (точка O_2 лежит на границе полупространства) расположен центр O абсолютно жесткого шара радиуса d ($d < l$). Будем рассматривать две системы координат: сферическую (ρ, ϑ, ψ) с центром в точке O и цилиндрическую (r, ψ, z) с началом в точке O_2.

В начальном моменте $\tau = 0$ времени абсолютно жесткий шар подвергается нестационарному вращению вокруг оси $O_2 z$ по закону $\Theta(\tau, \vartheta)$ при полном сцеплении с окружающей средой

$$v_\psi\big|_{\rho=d} = \Theta(\tau, \vartheta). \qquad (1)$$

С учётом осевой симметрии задачи движение среды описывается относительно ненулевой компоненты векторного потенциала Ψ волновым уравнением

$$\nu^2 \ddot{\varphi} = \Delta\varphi - \varphi/\rho^2 \sin^2\vartheta, \qquad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа в сферической системе координат (ρ, ϑ, ψ).

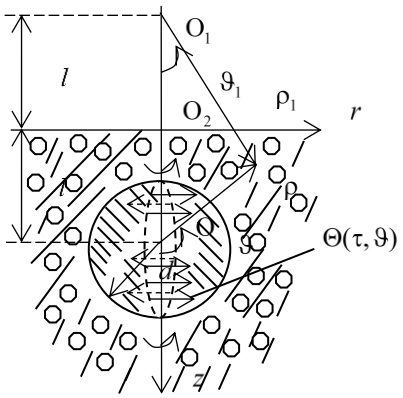


Рисунок 1. Геометрия Задачи.

Плоская граница полупространства является либо жесткой стенкой

$$v_\psi\big|_{z=0} = 0\,, \qquad (3)$$

либо свободной поверхностью

$$\sigma_{z\psi}\big|_{z=0} = 0\,. \qquad (4)$$

Начальные условия – однородные

$$\varphi\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}\big|_{\tau=0} = 0 \qquad (5)$$

и задача замыкается с требованием ограниченности решения на бесконечности

$$\lim_{\rho\to\infty}\varphi = 0\,. \qquad (6)$$

В этом случае функции v_ψ, V_ψ и $\sigma_{\rho\psi}$ взаимосвязаны следующими соотношениями:

$$v_\psi = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\varphi}{\rho}, \qquad V_\psi = \beta v_\psi\,, \qquad (7)$$

$$\sigma_{\rho\psi} = \frac{\eta-\chi}{2}\left(\frac{\partial v_\psi}{\partial\rho} - \frac{v_\psi}{\rho}\right). \qquad (8)$$

Постановка задачи приведена в следующих безразмерных величинах (штрих означает безразмерную величину)

$$\rho' = \frac{\rho}{d}\,,\ \tau = \frac{v_2 t}{d}\,,\ \varphi' = \frac{\varphi}{d^2}\,,\ \nu = \frac{v_2}{v_2^*}\,,\ v'_\psi = \frac{v_\psi}{d}\,,$$

$$V_\psi = \frac{V_\psi}{d}\,,\ \sigma'_{\rho\psi} = \frac{\sigma_{\rho\psi}}{H}\,,\ \beta = -\kappa_{12}/\kappa_{22}\,,\ \chi = \frac{A}{H}\,,$$

$$\eta = \frac{P}{H}\,,\ H = P + 2Q + R\,,\ P = A + 2N\,,$$

где v_ψ, V_ψ - компоненты вектора смещения скелета и жидкости соответственно; $\sigma_{\rho\psi}$ - компонент тензора напряжения; A и N - упругие константы скелета среды; R - давление, приложенное к жидкости; Q - величина сцепления между твердыми и жидкими компонентами; κ_{12} - коэффициент динамической связи между твердыми и жидкими компонентами; κ_{22} - эффективная масса жидкости при её относительном движении; v_2 - скорость распространения поперечных волн в среде (ниже везде штрих в обозначениях безразмерных величин опущен).

3. Метод решения.

Начально-краевая задача (1)-(6) решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени τ и методом неполного разделения переменных [15]. В пространстве изображений потенциал φ^L, компоненты v_ψ^L, V_ψ^L вектора смещения и $\sigma_{\rho\psi}^L$ тензора напряжения представим в виде бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\vartheta)$ [16, 18].

В пространстве изображений решение уравнения (2) с учётом условия ограниченности (6) записываем в виде:

$$\varphi^L = \varphi_1^L + \varphi_2^L\,, \qquad (10)$$

$$\varphi_1^L = -\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho}}\sum_{n=1}^{\infty} B_n^L(s) K_{n+1/2}(\rho\nu s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\vartheta)\,,$$

$$\varphi_2^L = -\frac{\sin\vartheta_1}{\sqrt{\rho_1}}\sum_{n=1}^{\infty} E_n^L(s) K_{n+1/2}(\rho_1\nu s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\vartheta_1)\,.$$

Здесь $B_n^L(s)$ и $E_n^L(s)$ - произвольные функции; ρ_1, ϑ_1, ψ_1 - дополнительная сферическая система координат, полученная переносом вдоль оси O_2z центра O исходной сферической системы в точку O_1, симметричную точке O относительно плоскости $z = 0$.

Далее ограничимся задачей о распространении от сферической полости осесимметричных сдвиговых волн при наличии жесткой стенки (условия (3)) или при свободной границе полупространства (условия (4)).

Учитывая связь координат ρ, ϑ и ρ_1, ϑ_1 на границе полупространства

$$\rho\big|_{z=0} = \rho_1\big|_{z=0}\,,\ \vartheta\big|_{z=0} + \vartheta_1\big|_{z=0} = \pi\,, \qquad (11)$$

а также свойства многочленов Гегенбауэра [16, 18]

$$C_{n-1}^{3/2}(-x) = (-1)^n C_{n-1}^{3/2}(x)\,, \qquad (12)$$

из граничных условий (3), (4) получаем связь между функциями $B_n^L(s)$ и $E_n^L(s)$:

$$B_n^L(s) = \pm(-1)^n E_n^L(s)\,. \qquad (13)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует жесткой стенке, а нижний – свободной границе полупространства.

Теперь подставляя (13) в (10) и используя теорему сложения [17] для функций Бесселя второго рода $J_{n+1/2}(x)$, а также выражения этих функций через элементарные [18], представляем изображение потенциала в виде следующего ряда:

$$\varphi^L = -\sin\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n^L(\rho, s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\vartheta)\,, \qquad (14)$$

где

$$\varphi_n^L(\rho, s) = \frac{1}{\rho^{n+1}(\nu s)^n}\Big[R_{n0}(\rho\nu s) E_n(s) e^{-r\nu s} +$$

$$+ W_{n0}(\rho\nu s)\sum_{p=1}^{\infty} U_{np}(s) E_p(s) e^{-2l\nu s}\Big], \qquad (15)$$

$$W_{n0}(s) = R_{n0}(-s)e^{s} - R_{n0}(s)e^{-s}\,,$$

$$U_{np}(s) = \frac{\pm(-1)^p(2n+1)}{2n(n+1)}\sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n1p1)}\frac{R_{\sigma 0}(2l\nu s)}{(2l\nu s)^{\sigma+1}}$$

где $b_\sigma^{(n1p1)}$ - коэффициенты Клебша-Гордона [17].

Аналогично (14), изображения перемещение v_{ψ}^{L}, напряжение $\sigma_{\rho\psi}^{L}$ и заданную функцию Θ^{L} раскладывая в ряды по полиномам Гегенбауэра, приходим следующим выражениям и граничному условию относительно коэффициентов рядов:

$$v_{\psi n}^{L}=\frac{\partial\varphi_{n}^{L}}{\partial\rho}+\frac{\varphi_{n}^{L}}{\rho},\ \sigma_{\rho\psi n}^{L}=\frac{\eta-\chi}{2}\left(\frac{\partial v_{\psi n}^{L}}{\partial\rho}-\frac{v_{\psi n}^{L}}{\rho}\right), \tag{16}$$

$$v_{\psi n}^{L}\Big|_{r=1}=\Theta_{n}^{L}(s). \tag{17}$$

Далее, с учётом (15) из формул (16) приходим к следующим выражениям коэффициентов $v_{\psi n}^{L}$, $\sigma_{\rho\psi n}^{L}$:

$$v_{\psi n}^{L}=-\frac{(\nu s)^{-n}}{\rho^{n+2}}\Big[R_{n3}(\rho\nu s)E_{n}(s)e^{-\rho\nu s}+ +W_{n3}(\rho\nu s)U_{n}(s)\Big], \tag{18}$$

$$\sigma_{\rho\vartheta n}^{L}=\frac{(\eta-\chi)s^{-n}}{2\rho^{n+3}\nu^{n+2}}\Big[R_{n4}(\rho\nu s)E_{n}(s)e^{-\rho\nu s}+ +W_{n4}(\rho\nu s)U_{n}(s)\Big], \tag{19}$$

$$W_{nm}(s)=R_{nm}(-s)e^{s}-R_{nm}(s)e^{-s},\ m=\overline{3,4},$$

$$R_{n3}(s)=R_{n1}(s)-2R_{n0}(s),$$

$$R_{n4}(s)=R_{n2}(s)-R_{n0}(s),$$

$$U_{n}(s)=\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)E_{p}(s)e^{-2l\nu s}.$$

Здесь $R_{nk}(s)$ - полиномы параметра s, $k=\overline{0-2}$ [5, 8].

Подставляя (18) в граничное условие (17), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных функций $E_{n}^{L}(s)$, которую запишем в виде матричного уравнения:

$$\mathbf{N}(s)\mathbf{E}(s)t^{2}+\mathbf{G}^{(1)}(s)\mathbf{E}(s)y+ +\mathbf{G}^{(2)}(s)\mathbf{E}(s)yt^{2}=\mathbf{\Theta}(s)t, \tag{20}$$

$$y=e^{-2l\nu s},\ t=e^{-\nu s}.$$

Здесь $\mathbf{N}(s)$ - бесконечная диагональная матрица с элементами $N_{n}(s)$; $\mathbf{G}^{(l)}(s)$ - бесконечные матрицы элементов $G_{np}^{(l)}(s)$ $(l=1,2)$; $\mathbf{\Theta}(s)$ - бесконечный вектор-столбец с элементами $\Theta_{n}(s)$; $\mathbf{E}(s)$ - бесконечный неизвестный вектор-столбец с компонентами $E_{n}^{L}(s)$, а функции $N_{n}(s)$, $G_{np}^{(l)}(s)$ и $\Theta_{n}(s)$ в зависимости от типа граничных условий на включении имеют вид

$$N_{n}(s)=R_{n3}(d\nu s),\quad \Theta_{n}(s)=-d^{n+2}(\nu s)^{n}\Theta_{n}^{L}(s),$$

$$G_{np}^{(1)}(s)=N_{n}(-s)U_{np}(s),$$

$$G_{np}^{(2)}(s)=N_{n}(s)U_{np}(s).$$

Решение матричного уравнения (20) разыскиваем в виде бесконечного ряда по экспонентам

$$\mathbf{E}(s)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathbf{e}_{ij}(s)y^{i}t^{-j-1}, \tag{21}$$

где $\mathbf{e}_{ij}(s)$ - бесконечные векторы-столбцы с элементами $e_{ij}^{(n)}(s)$.

Подставляя ряд (21) в уравнение (20) и приравнивая коэффициенты левой и правой частей при одинаковых степенях переменных y и t (ряд в правой части содержит только один ненулевой член), получаем рекуррентную систему уравнений относительно функций $e_{ij}^{(n)}(s)$ и соответствующие начальные условия к ним

$$e_{ij}^{(n)}(s)=\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)e_{i-1,j+1}^{(p)}(s)- -\frac{N_{n}(-s)}{N_{n}(s)}\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)e_{i-1,j-1}^{(p)}(s),\ (i\geq 1,\ j\geq 1),$$

$$e_{i0}^{(n)}(s)=\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)e_{i-1,0}^{(p)}(s),\qquad (i\geq 1),$$

$$e_{i1}^{(n)}(s)=0,\ (i\geq 0), \tag{22}$$

$$e_{0j}^{(n)}(s)=0,\qquad (j\geq 1),$$

$$e_{00}^{(n)}(s)=\Theta_{n}(s)/N_{n}(s).$$

Эти соотношения позволяют определить все искомые изображения без использования редукции бесконечной системы уравнений. Анализ рекуррентных соотношений показывает, что изображения есть рациональные функции параметра преобразования Лапласа s, который дает возможность вычислять их оригиналы, а следовательно, и оригиналы коэффициентов перемещения и напряжения в среде с помощью вычетов из теории функций комплексных переменных [19].

Окончательные формулы для изображений коэффициентов рядов по полиномам Гегенбауэра искомых функций следуют из (18) и (19):

$$v_{\psi n}^{L}(\rho,s)=-\frac{1}{\rho^{n+2}(\nu s)^{n}}\sum_{i,j=0}^{\infty}\Big[R_{n3}(\rho\nu s)e_{ij}^{(n)}(s)t^{\rho}+ +W_{n3}(\rho\nu s)\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)e_{ij}^{(p)}(s)y\Big]y^{i}t^{-j-1}, \tag{23}$$

$$\sigma_{\rho\psi n}^{L}(\rho,s)=\frac{(\eta-\chi)s^{-n}}{2\rho^{n+3}\nu^{n+2}}\sum_{i,j=0}^{\infty}\Big[R_{n4}(\rho\nu s)e_{ij}^{(n)}(s)t^{\rho}+ +W_{n4}(\rho\nu s)\sum_{p=1}^{\infty}U_{np}(s)e_{ij}^{(p)}(s)y\Big]y^{i}t^{-j-1}.$$

С помощью вычетов определяются оригиналы последних формул [19], которые с рядами полиномов Гегенбауэра позволяют получить основные решения задач.

4. Численные результаты и сравнения.

Для примера рассматривается нестационарное колебание полупространства песчаника, насыщенного керосином при нестационарном вращении жесткого шара. Параметры песчаника, насыщенного керосином заданы с величинами $A = 4.026 \cdot 10^8$ Па, $N = 2.493 \cdot 10^8$ Па, $R = 0.672 \cdot 10^8$ Па, $Q = 0.295 \cdot 10^8$ Па, $\beta_0 = 0.26$, $\rho_s = 2.6 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho_f = 0.82 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\rho_{12} = -0.0019 \cdot 10^3$ кг/м^3, которому соответствует следующие безразмерные величины: $\beta = 0.0088331$, $\gamma = 1$, $\eta = 0.8772$, $\chi = 0.392$. Центр жесткой сферы расположен на расстоянии $h = 1.5$, плоская граница полупространства – свободная поверхность (4). Абсолютно жесткая сфера вращается вокруг оси $O_2 z$ по закону $\Theta(\tau, \vartheta) = \tau e^{-\tau} H(\tau)$ при полном сцеплении с окружающей средой, где $H(\tau)$ - функция Хевисайда.

Результаты численных экспериментов представлены в виде графиков изменения компонент $\sigma_{\rho\psi}$, $\sigma_{\vartheta\psi}$ тензора напряжения и v_ψ перемещения по безразмерному времени τ. Числовые результаты получены с учётом семи членов рядов по полиномам Гегенбауэра.

Графики, приведенные на рис. 2, демонстрируют изменение компоненты $\sigma_{\rho\psi}$ напряжения в точках среды: $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/2$ (кривая 1), $\rho = 1.2$, $\vartheta = \pi/2$ (кривая 2) и $\rho = 1.4$, $\vartheta = \pi/2$ (кривая 3). На рис. 3 построены кривые, характеризующие изменения компоненты $\sigma_{\vartheta\psi}$ напряжения по времени в различных точках окружающей среды: $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 1), $\rho = 1.2$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 2) и $\rho = 1.4$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 3).

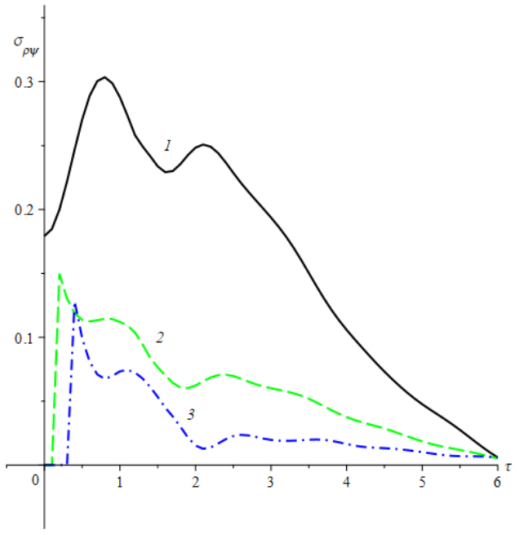


Рисунок 2. Изменения тангенциального $\sigma_{\rho\psi}$ напряжения по времени.

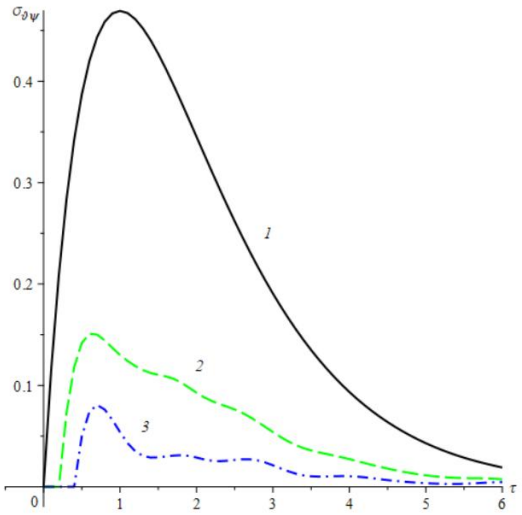


Рисунок. 3. Изменения компоненты $\sigma_{\vartheta\psi}$ напряжения по времени.

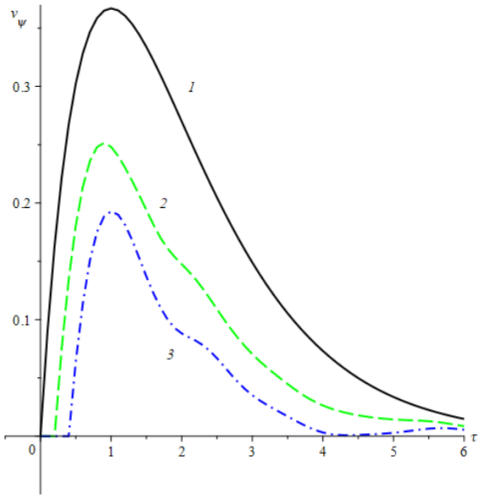


Рисунок 4. Изменение перемещения v_ψ по времени.

Рис. 4 показывает графики изменения компоненты v_ψ перемещения в точках полупространства: $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 1), $\rho = 1.2$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 2) и $\rho = 1.4$, $\vartheta = \pi/4$ (кривая 3).

5. Заключение.

В данной работе мы изучали нестационарные колебания пористо-упругого полупространства, насыщенного жидкостью с абсолютно жестким шаром. Мы решали соответствующую начально-краевую задачу и исследовали нестационарный волновой процесс в насыщенном жидкостью пористо-упругом полупространстве.

В частности, наши выводы сводятся к следующему:

- разработан алгоритм решения задачи о нестационарном колебании пористо-упругого полупространства, насыщенного жидкостью при вращении абсолютно жесткого шара.
- найдены точные формулы для компонент смещения и тензора напряжений.
- получены численные результаты, которые представлены в виде графиков. Графики показывают, что с приходом волны появляется скачок. С увлечением расстояния уменьшаются скачки.

Результаты исследования могут быть использованы для проектирования при строительстве сооружений, а также при строительстве подземных резервуаров.

References:

1. Ako Baxari, Gael LefyovMesguez, Arno Mesgues, & Nil Popplvell (2020). A comprehensive time-domain elasto-acoustics study of a fluid-filled spherical shell embedded in an elastic medium, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Volume 132, May 2020, 106002, https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2019.106002
2. Behrouz Karami, Maziar Janghorban, & Abdelouahed Tounsi (2018). Variational approach for wave dispersion in anisotropic doubly-curved nanoshells based on a new nonlocal strain gradient higher order shell theory, *Thin-Walled Structures*, Volume 129, August 2018, pp. 251-264, https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.02.025
3. Benjamin L. Schwartz, Yifei Liu, Thomas J. Royston, & Richard L. Magin (2016). Axisymmetric diffraction of a cylindrical transverse wave by a viscoelastic spherical inclusion, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 364, 3 March 2016, Pages 222-233, https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.11.023
4. Markov, M., & Markov, A. (2022). Scattering of elastic wave from poroelastic inclusions located in a fluid, *Waves in Random and Complex Media*, Vol. 32, 2022, Issue 4, pp. 1743-1757. https://doi.org/10.1080/17455030.2020.1834172
5. Musurmonova, M. (2024). "Propagation of Non-stationary Skew-Symmetric Waves from a Spherical Cavity in a Porous-elastic Half-space," *WSEAS TRANSACTIONS on APPLIED and THEORETICAL MECHANICS*, 2024, Vol. 19, pp. 135-142. http://doi.org/10.37394/232011.2024.19.15
6. Saliyev, A.A., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (2008). The propagation of non-stationary waves from a spherical cavity in an acoustic layer, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 72, No. 4, pp. 410-416. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.013
7. Hasheminejad, S.M., & Badsar, S.A. (2005). Elastic Wave Scattering by Two Spherical Inclusions in a Poroelastic Medium, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 131, Issue 9, Sep 1, 2005. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:9(953)
8. Shukurov, A.M., & Jabborov, A.U. (2025). Unsteady Radial Oscillations of an Elastic Spherical Layer in an Infinite Space of an Ideal Fluid, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, Volume 20, 2025, pp: 178-188. https://doi.org/10.37394/232013.2025.20.18
9. Shukurov, A., & Musurmonova, M. (2024). Propagation of skew-symmetric non-stationary waves in an elastic spherical layer, *AIP Conf. Proc.* 3004, 040009, https://doi.org/10.1063/5.0199588
10. Shukurov, A. (2023). Propagation of skew-symmetric unsteady shear waves from thick-walled shell in elastic space, *E3S Web of Conferences*, Vol. 365, 01014, https://doi.org/10.1051/e3sconf/202336501014
11. Shukurov, A.M. (2006). Diffraction of non-stationary waves by an absolutely rigid sphere in an elastic half-space// *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*, 2006. No. 4, pp.48-51.
12. Gorshkov, A.G., Tarlakovskii, D.V., & Shukurov, A.M. (2004). Propagation of transient shear waves from a spherical inclusion in an elastic half-space, Mechanics of Solids, 2004, No. 6, pp. 62-68.
13. Xu Liu, Stewart Greenhalgh, & Bing Zhou (2009). Scattering of plane transverse waves by spherical inclusions in a poroelastic medium, *Geophysical Journal International*, Volume 176, Issue 3, March 2009, pp. 938–950, https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.04026.x
14. Song-Chol Ri, Shuhong Wang, & Hak -Son Jin (2023). "Scattering of Plane SH Waves Around a Lined Tunnel in the Covering Layer of Composite Strata, " *Mechanics of Solids*, Vol. 58, No. 5, pp. 1806-1820. http://doi.org/10.3103/S002565442360112X
15. Doetsch, G. (1971). *Guide to the practical applications of the Laplace and Z – transforms*, Van No strand-Reinhold.
16. Kuznetsov, D.S. (1985). *Special functions*, Moscow, Higher School.
17. Ivanov, Ye.A. (1970). *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*, National Aeronautics and Space Administration, Washington.
18. (1984). *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical*

Tables, edited by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Dover publications, New York.

19. Lavrentiev, M.A., & Shabbat, B.V. (1987). *Methods of the theory of functions of a complex variable*, Moscow, Nauka.