

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2023 Issue: 04 Volume: 120

Published: 30.04.2023 <http://T-Science.org>

Issue

Article



Yu.R. Krahmaleva

M.Kh.Dulaty Taraz Regional University
PhD in Technical Science
Taraz, Kazakhstan

PRACTICAL IMPLEMENTATION OF THE CALCULATION OF CURVILINEAR INTEGRALS IN MAPLE

Abstract: Extensive practical applications of the theory of curved integrals and the development of the modern direction of mathematics - computer mathematics create prerequisites for expanding the possibilities of their implementation in modern computing systems. The article deals with the issues of solving problems of the theory of curved integrals in the Maple computer mathematics system.

Key words: curvilinear integral of the 1st kind, substitution of variables, limits of integration, curvilinear integral of the 2nd kind, contour.

Language: Russian

Citation: Krahmaleva, Yu. R. (2023). Practical implementation of the calculation of curvilinear integrals in Maple. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 04 (120), 344-349.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-120-63> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2023.04.120.63>

Scopus ASCC: 2600.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В MAPLE

Аннотация: Обширные практические приложения теории криволинейных интегралов и развитие современного направления математики - компьютерной математики создают предпосылки для расширения возможностей их реализации в современных системах вычислений. В статье рассматриваются вопросы решения задач теории криволинейных интегралов в системе компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: криволинейный интеграл 1-го рода, замена переменных, пределы интегрирования, криволинейный интеграл 2-го рода, контур.

Введение

Как известно, областью интегрирования определённого интеграла является отрезок на прямой; двойного интеграла - некоторая область в плоскости; тройного - некоторая область в пространстве. Вместе с тем существуют интегралы, областью интегрирования которых является кривая, которая имеет свое расположение в плоскости или в пространстве. Такие интегралы называются криволинейными интегралами [1]. Аппарат криволинейных интегралов значительно расширяет возможности приложений математического анализа к решению задач из механики и физики. В связи с чем, рассматривается вопрос их практической

реализации в современных вычислительных системах.

Рассмотрим вычисление криволинейного интеграла 1-го рода в системе компьютерной математики Maple. Нужно иметь в виду, что с каждой новой версией программы существенно расширяются возможности вычислений над пространственными объектами и поверхностями. С версии Maple 8 введен пакет *VectorCalculus*, который при вызове, открывает доступ к практической реализации вычисления криволинейных интегралов. Данный пакет после загрузки может видоизменить многие операторы, команды и функции, встроенные в ядро системы. При этом происходит и изменения математического и физического смысла. Потому

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.771	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

пользоваться пакетом нужно весьма осторожно[2].

Для вычисления криволинейных интегралов необходимо подключить пакет *VectorCalculus*:

```
restart;  
with(VectorCalculus);
```

$$\int_L (x+y)dl = \int_{OB} (x+y)dl + \int_{OA} (x+y)dl + \int_{BA} (x+y)dl,$$

и вычисляя каждый интеграл на конкретной прямой, получим значение:

$$J = \int_L (x+y)dl = \int_{OB} (x+y)dl + \int_{OA} (x+y)dl + \int_{BA} (x+y)dl = 1 + \sqrt{2}.$$

С помощью команды *PathInt* () задаем криволинейный интеграл с опцией 'inert', для того, чтобы автоматически интеграл не вычислялся, как выполняет система, а увидеть его

Пусть нужно вычислить $J = \int_L (x+y)dl$,

где L – контур треугольника с вершинами $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ [3]. При непосредственном решении используя свойство аддитивности интеграла:

вывод на рабочем листе. Для каждого отрезка используем опцию *Line* в которой указываем точки отрезка[1]:

```
I1:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <0,0>, <1,0> ), 'inert' );  
I2:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <0,0>, <0,1> ), 'inert' );  
I3:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <1,0>, <0,1> ), 'inert' );
```

$$I1 := \int_0^1 t dt$$

$$I2 := \int_0^1 t dt$$

$$I3 := \int_0^1 \sqrt{2} dt.$$

Вычислим каждый интеграл без опции 'inert':

```
zI1:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <0,0>, <1,0> ));  
zI2:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <0,0>, <0,1> ));  
zI3:=PathInt( x+y, [x,y] = Line( <1,0>, <0,1> ));
```

$$zI1 := \frac{1}{2}$$

$$zI2 := \frac{1}{2}$$

$$zI3 := \sqrt{2}$$

Суммируем полученные значения:

```
zI := zI1+zI2+zI3;
```

$$zI := 1 + \sqrt{2}$$

Используя команду *LineSegments*, можно без использования свойства аддитивности интеграла, получить решение[1]:

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.771	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

```
I:=PathInt( x+y, [x,y] = LineSegments( <0,0>, <1,0>,<0,1> ), 'inert' );
ZI:=PathInt( x+y, [x,y] = LineSegments( <0,0>, <1,0>,<0,1> ) );
```

$$ZI := 1 + \sqrt{2}$$

Рассмотрим вычисление криволинейного интеграла 1-го рода, используя замену переменных. Например, вычислим

$$J = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl \quad \text{по окружности}$$

$L: x^2 + y^2 = ax$. При введении полярной

замены: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, имеем

$$\rho(\varphi) = a \cos \varphi \quad \text{для } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] [3].$$

При практической реализации в системе Maple в этом случае используем команду *PathInt* () с заменой переменных: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ с учетом $\rho(\varphi) = a \cos \varphi$ [1]:

```
C:=PathInt( sqrt(x^2+y^2), [x,y] = Path( <a*(cos(phi))^2,a*sin(phi)*cos(phi)>, phi=-Pi/2..Pi/2 ), 'inert' );
zO:=PathInt( sqrt(x^2+y^2), [x,y] = Path( <a*(cos(phi))^2,a*sin(phi)*cos(phi)>, phi=-Pi/2..Pi/2 ) );
```

$$C := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(\phi)^4 a^2 + a^2 \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2} \sqrt{4 a^2 \sin(\phi)^2 \cos(\phi)^2 + a^2 (2 \cos(\phi)^2 - 1)^2} d\phi$$

$$zO := 2 a^2$$

Как видно, в этом примере нужно было предварительно выполнить вычисления, связанные по замене и пределам интегрирования.

Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода осуществляется, как и криволинейных интегралов 1-го рода в специализированном пакете *VectorCalculus* системе компьютерной математики Maple. При этом следует обратить внимание на то, что при введении криволинейного интеграла по координатам используется команда *LineInt*. Для введения подынтегральной функции

вводится команда *VectorField*, которая подчеркивает, что функция относится к вектор-функции [1].

Пусть требуется вычислить

$$J = \int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \quad \text{где } L -$$

парабола $y = x^2$ при $-1 \leq x \leq 1$ [4]. В системе Maple для решения вводятся команды:

```
restart;
with(Student[VectorCalculus]);
VectorCalculus[LineInt]( VectorField( <x^2-2*x*y,y^2-2*x*y> ),
Path( <x,x^2>,x=-1..1 ), 'inert')=
LineInt(VectorField( <x^2-2*x*y,y^2-2*x*y> ),
Path(<x,x^2>,x=-1..1 ));
```

$$\int_{-1}^1 -2x^3 + x^2 + 2(x^4 - 2x^3)x dx = \frac{-14}{15}$$

Как видно, система уже при выводе на рабочий лист произвела вычисления: значения y

заменяла на x^2 , использовала формулу:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x)) dx$$

и записала подынтегральное выражение с их учетом.

Рассмотрим решение вычисления криволинейного интеграла 2-го рода в системе

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Maple с графической визуализацией исходных данных: пусть нужно вычислить

$$\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

где L - контур треугольника с вершинами в точках $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$. [5]

Подключим пакет `plots`. Составим графические объекты G - векторное поле с фиксацией области интегрирования: треугольник ABC , стороны которого являются границами области;

PA - пропись на графике точки $A(1,1)$ с помощью команды `textplot`;

TA -фиксация точки $A(1,1)$ на графике в виде круга;

PB - пропись на графике точки $B(2,2)$ с помощью команды `textplot`;

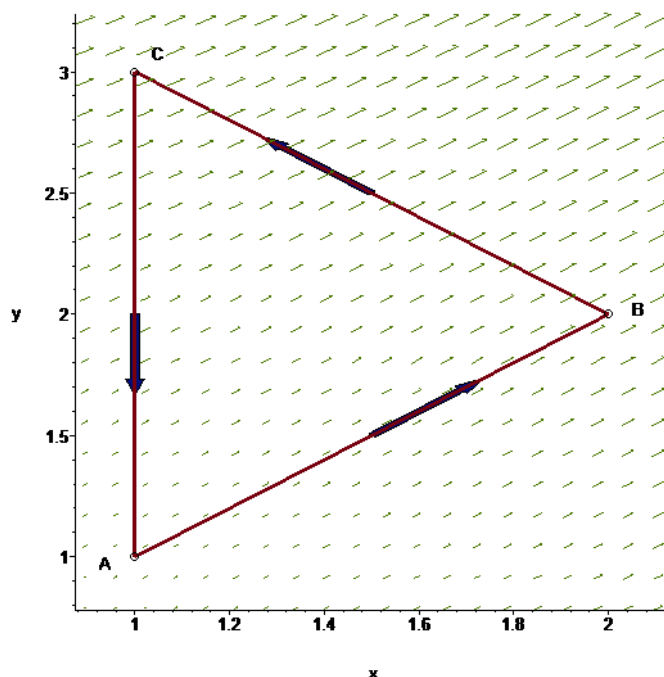
TB -фиксация точки $B(2,2)$ на графике в виде круга;

PC - пропись на графике точки $C(1,3)$ с помощью команды `textplot`;

TC -фиксация точки $C(1,3)$ на графике в виде круга.

Прописываем эти объекты в команде `display` для графической визуализации:

```
restart;
with(Student[VectorCalculus]);
with(plots):
G:=LineInt(VectorField(<2*(x^2+y^2),(x+y)^2>),
LineSegments(<1,1>,<2,2>,<1,3>,<1,1>), output=plot):
PA:=textplot([1-0.05,1-0.05,A],align={ABOVE,LEFT}):
TA:=pointplot([1,1],symbol=circle,symbolsize=14):
PB:=textplot([2+0.05,2+0.05,B],align={BELOW,RIGHT}):
TB:=pointplot([2,2],symbol=circle,symbolsize=14):
TC:=textplot([1+0.05,3+0.05,C],align={ABOVE}):
PC:=pointplot([1,3],symbol=circle,symbolsize=14):
display(G,PA,TA,PB,TB,PC,TC,PC);
```



Вводим команду вычисления криволинейного интеграла 2-го рода:

```
VectorCalculus[LineInt]( VectorField(<2*(x^2+y^2),(x+y)^2>),
LineSegments(<1,1>,<2,2>,<1,3>,<1,1>), inert)=
LineInt(VectorField(<2*(x^2+y^2),(x+y)^2>),
```

Impact Factor:

ISRA (India)	= 6.317	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 1.582	ПИИЦ (Russia)	= 3.939	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 8.771	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 7.184	OAJI (USA)	= 0.350

LineSegments(<1,1>,<2,2>,<1,3>,<1,1>);

$$\int_0^1 4(1+t)^2 + (2+2t)^2 dt + \int_0^1 16 - 2(2-t)^2 - 2(2+t)^2 dt + \int_0^1 -2(4-2t)^2 dt = -\frac{4}{3}$$

Создадим картинку векторного поля для вычисления $J = \int_L xydx + yzdy + zxdz$, где L - четверть окружности $x = a \cos t$, $y = b \sin t$,

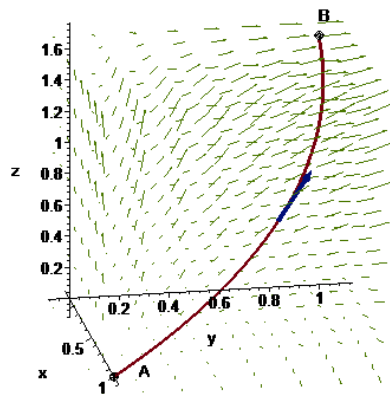
$z = t$ пробегаемая в направлении возрастания t [6]. Подключим пакет графически построений *plots*. Составляем графические объекты и прописываем с помощью команды *display* вывод графиков в одно изображение[1]:

```

restart;
with(Student[VectorCalculus]);
with(plots):
P1:=LineInt(VectorField( <x*y,y*z,z*x> ),Path( <cos(t),sin(t),t>,t=0..Pi/2 ), output=plot );
P2:=textplot3d([1,0+0.1,0,A],align={BELOW,RIGHT},color=black):
T1:=pointplot3d([1,0,0],symbol=circle,symbolsize=14,color=black):
P3:=textplot3d([0,1,1.7,B],align={BELOW,RIGHT},color=black):
T2:=pointplot3d([0,1,1.6],symbol=circle,symbolsize=14,color=black):
display(P1,P2,T1,P3,T2,axes=normal,orientation=[-5, 65]);

```

В результате получилось такое изображение:



Вводим команду вычисления криволинейного интеграла при помощи параметрических уравнений:

```

VectorCalculus[LineInt]( VectorField( <x*y,y*z,z*x> ),
Path( <cos(t),sin(t),t>,t=0..Pi/2 ),'inert')=
LineInt(VectorField( <x*y,y*z,z*x> ),
Path(<cos(t),sin(t),t>,t=0..Pi/2 ));

```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t) \sin(t)^2 + \sin(t) t \cos(t) + t \cos(t) dt = -\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

Как видим, возможности современных математических пакетов позволяют проводить вычисления криволинейных интегралов,

создавать графическую визуализацию решения задач, что сокращает временные затраты процесса вычисления, его трудоемкость.

References:

1. D`jakonov, V.P. (2017). «*Maple 9.5 10 v matematike, fizike i obrazovanii*». (p.720). Moskva: SOLON-PRESS.
2. Zorich, V.A. (2017). *Matematicheskij analiz zadach estestvoznaniya*. (p.160). Moscow: MCNMO.
3. Aksenov, A.P. (2016). *Matematicheskij analiz v 4 ch. chast` 3*. (p.361). Lubercy: Jyrajt.
4. Vinogradova, I.A. (2018). *Matematicheskij analiz v zadachah i uprazhnenijah. V 3-h tomah. T.3: Kratnye, krivolinejnye i poverhnostny*. (p.256). Moscow: MCNMO.
5. Zemljakov, A.N. (2013). *Matematicheskij analiz real`nosti*. (p.360). Moscow: MCNMO.
6. Nikitin, A.A. (2016). *Matematicheskij analiz. uglublennyj kurs*. (p.460). Lubercy: Jyrajt.
7. Kartashev, A. P. (2014). *Matematicheskij analiz*. (p.448). Moscow: Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury izdatel`stva "Nauka".
8. Butuzov, V. F. (2018). *Matematicheskij analiz v voprosah i zadachah*. 6-e izd., ispr. (p.480). SPb.: Lan`.
9. Dragalin, A.G. (2017). *Konstruktivnaja teorija dokazatel`stv i nestandartnyj analiz. («Matematicheskij intuicionizm. Vvedenie v teoriiu dokazatel`stv», i dr.)*. (p.544). Moscow: URSS.
10. Shipachev, V.S. (2018). *Matematicheskij analiz. Teorija i praktika*. (p.350). Moscow: Vysshaja shkola.